

# Rinforzo a flessione

## Esempi numerici



## Rinforzo a flessione

- Il rinforzo a flessione è necessario per elementi strutturali soggetti a momento flettente di calcolo maggiore della corrispondente resistenza
- Il rinforzo a flessione mediante materiali compositi è eseguito mediante applicazione di uno o più lamine ovvero uno o più strati di tessuto al lembo teso dell'elemento da rinforzare

# Rinforzo a flessione: Calcolo del Momento Resistente

La rottura a flessione si ha per:

- Raggiungimento della massima deformazione plastica nel calcestruzzo compresso,  $\varepsilon_{cu}$
- raggiungimento di una deformazione massima nel rinforzo in FRP,  $\varepsilon_{fd}$ , calcolata come:

$$\varepsilon_{fd} = \min \left\{ \eta_a \frac{\varepsilon_{fu}}{\gamma_f}, \varepsilon_{f,max} \right\}$$

- $\eta_a$ : fattore di conversione ambientale (per varie condizioni di esposizione e vari sistemi in FRP)
- $\varepsilon_{fu}$ : deformazione ultima del rinforzo
- $\gamma_f$ : coefficienti parziali per materiali e prodotti
- $\varepsilon_{f,max}$ : deformazione massima per delaminazione

# Rinforzo a flessione: Deformazione massima nel rinforzo

- $\eta_a$  : fattore di conversione ambientale (per varie condizioni di esposizione e vari sistemi in FRP)

Condizione di esposizione	Tipo di fibra/resina	$\eta_a$
Esposizione interna	Carbonio/Epossidica	0.95
	Vetro/Epossidica	0.75
	Aramidica/Epossidica	0.85
Esposizione esterna (ponti colonne parcheggi)	Carbonio/Epossidica	0.85
	Vetro/Epossidica	0.65
	Aramidica/Epossidica	0.75
Ambiente aggressivo (centrali chimiche e centrali di trattamento delle acque)	Carbonio/Epossidica	0.85
	Vetro/Epossidica	0.50
	Aramidica/Epossidica	0.70

# Rinforzo a flessione: Deformazione massima nel rinforzo

–  $\gamma_f$  : coefficienti parziali per materiali e prodotti

MATERIALE/PRODOTTO	APPLICAZIONE TIPO A	APPLICAZIONE TIPO B
Lamine e tessuti FRP	1.20	1.50

**Applicazione tipo A:** sistemi di rinforzo prefabbricati in condizioni di controllo di qualità ordinario, applicazione di tessuti a mano con elevato controllo di qualità

**Applicazione tipo B:** applicazione di tessuti a mano in condizione di qualità ordinario, applicazione di qualsiasi sistema di rinforzo in condizioni di difficoltà ambientale o operativa



# Rinforzo a flessione: Deformazione massima nel rinforzo

- $\varepsilon_{f,max}$  : deformazione massima per delaminazione intermedia (Modalità 2)

$$\varepsilon_{f,max} = k_{cr} \cdot \frac{f_{fdd}}{E_f}$$

- $k_{cr}$  : coefficiente pari a 3
- $E_f$  : Modulo Elastico FRP
- $f_{fdd}$  : tensione di progetto nel rinforzo

$$f_{fdd} = \frac{1}{\gamma_{fd} \cdot \sqrt{\gamma_c}} \sqrt{\frac{2E_f T_{FRk}}{t_f}}$$

# Rinforzo a flessione: Tensione di progetto nel rinforzo

–  $f_{fdd}$  : tensione di progetto nel rinforzo

$$f_{fdd} = \frac{1}{\gamma_{fd} \cdot \sqrt{\gamma_c}} \sqrt{\frac{2E_f \Gamma_{Fk}}{t_f}}$$

$\Gamma_{Fd}$  : Valore di progetto energia  
specifica di frattura



$$\Gamma_{Fk} = 0.03 \cdot k_b \cdot \sqrt{f_{ck} \cdot f_{ctm}}$$

[forze in N, lunghezze in mm]

$f_{ck}$  : Valore caratteristico resistenza a compressione calcestruzzo

$f_{ctm}$  : Valore medio resistenza a trazione del calcestruzzo

$\gamma_c$  : coefficiente parziale del calcestruzzo (fornito da Normativa vigente)

# Rinforzo a flessione: Tensione di progetto nel rinforzo

$$\Gamma_{Fk} = 0.03 \cdot k_b \cdot \sqrt{f_{ck} \cdot f_{ctm}}$$

$k_b$ : Fattore di tipo geometrico



$$k_b = \sqrt{\frac{2 - \frac{b_f}{b}}{1 + \frac{b_f}{400}}} \geq 1 \text{ per } \frac{b_f}{b} \geq 0.33$$

[lunghezze in mm]

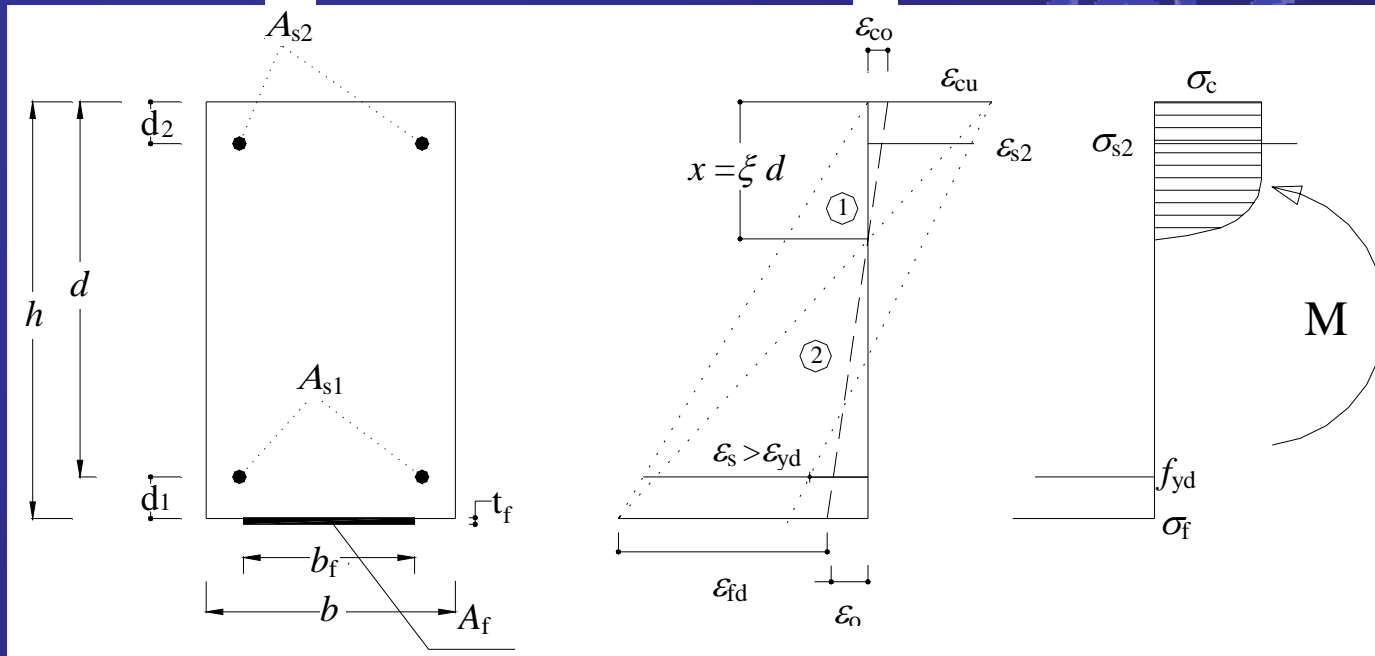
$b$ : larghezza della trave

$b_f$ : larghezza rinforzo

se  $b_f/b < 0.33$  nella formula si usa  $b_f/b = 0.33$



# Rinforzo a flessione: Calcolo del Momento Resistente



**Zona 1:** Rottura per raggiungimento deformazione elastica limite di progetto nelle fibre

**Zona 2:** Rottura per schiacciamento del calcestruzzo con acciaio teso snervato

# Rinforzo a flessione: Calcolo del Momento Resistente

## Zona 1:

- FRP:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{fd}$$

- Cls lembo compresso:

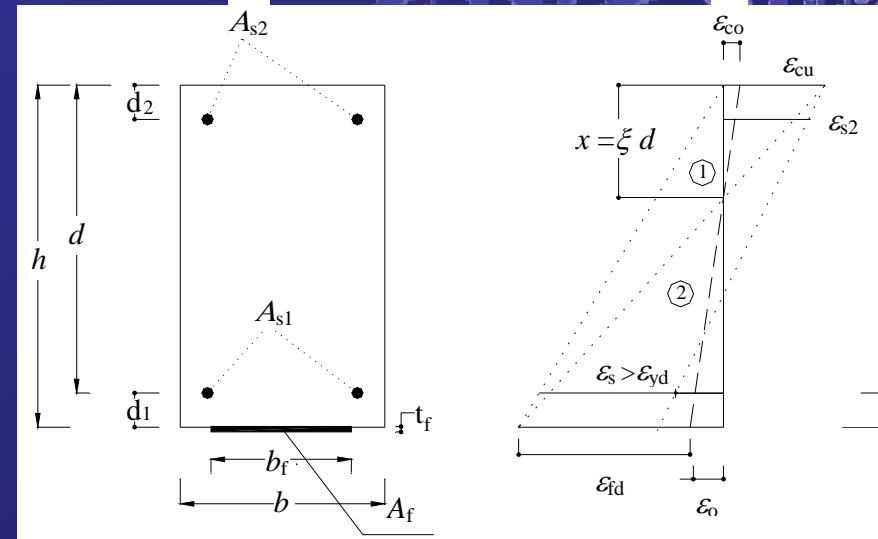
$$\varepsilon_c = (\varepsilon_{fd} + \varepsilon_o) \cdot \frac{x}{(h-x)} \leq \varepsilon_{cu}$$

- Acciaio compresso:

$$\varepsilon_{s1} = (\varepsilon_{fd} + \varepsilon_o) \cdot \frac{d-x}{(h-x)}$$

- Acciaio teso:

$$\varepsilon_{s2} = (\varepsilon_{fd} + \varepsilon_o) \cdot \frac{x-d_2}{(h-x)}$$



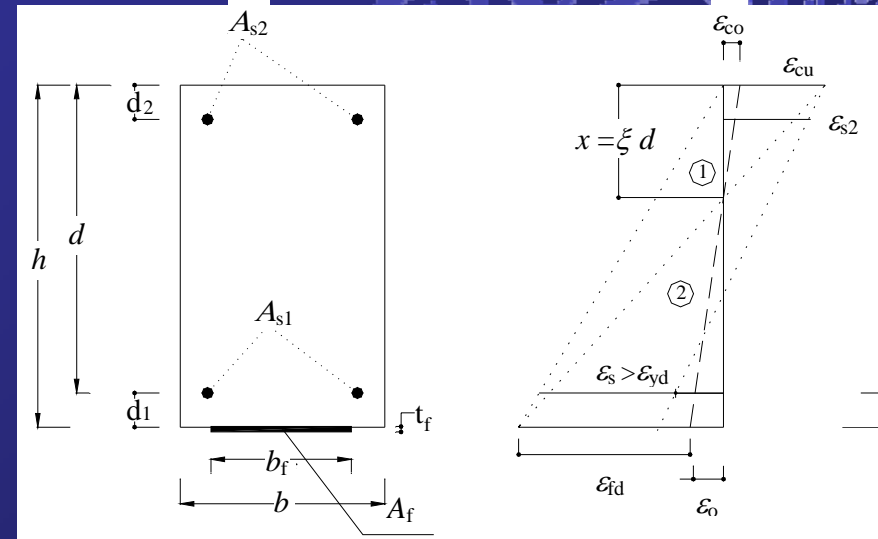
**E' superfluo verificare l'entità della deformazione dell'acciaio teso:**

I valori usuali della deformazione limite delle fibre  $\varepsilon_{fd}$  e del calcestruzzo,  $\varepsilon_{cu}$  sono tali da escludere in genere l'attingimento della deformazione limite dell'acciaio

# Rinforzo a flessione: Calcolo del Momento Resistente

## Zona 2:

- FRP:
 
$$\varepsilon_f = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} \cdot (h - x) - \varepsilon_0 \leq \varepsilon_{fd}$$
- Cls lembo compresso:
 
$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$$
- Acciaio compresso:
 
$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{d - x}{x}$$
- Acciaio teso:
 
$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cu} \cdot \frac{x - d_2}{x}$$



Non viene raggiunta la  
deformazione limite nelle fibre

# Rinforzo a flessione: Calcolo del Momento Resistente

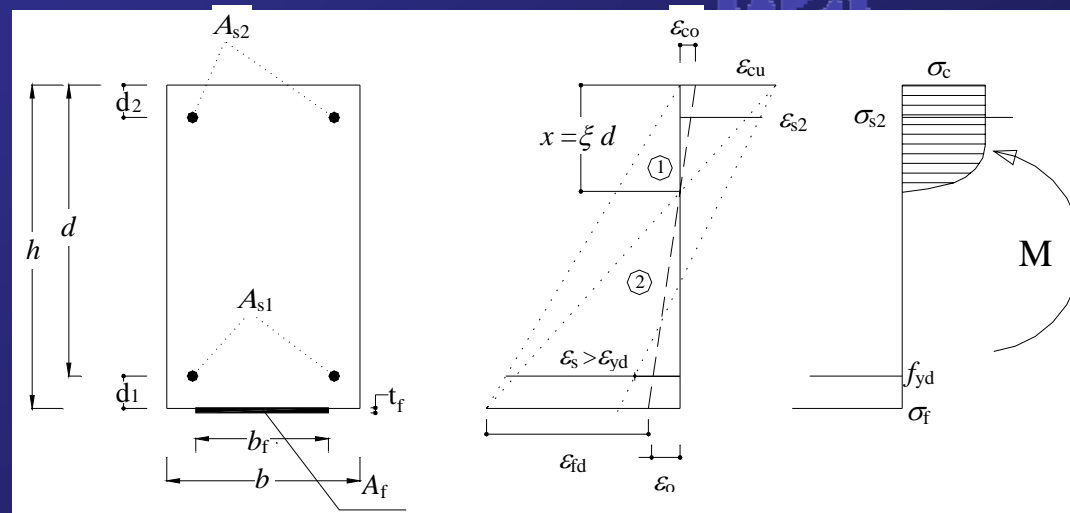
In entrambe le zone il momento resistente  $M_u$  e  $x$  si calcolano:

Eq. equilibrio rotazione intorno all'asse baricentrico armatura tesa

$$M_u = \psi \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (d - \lambda \cdot x) + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d - d_2) + A_f \cdot \sigma_f \cdot d_1$$

Eq. equilibrio alla traslazione lungo l'asse della trave

$$0 = \psi \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} + \sigma_{s2} \cdot A_{s2} - A_{s1} \cdot f_{yd} - A_f \cdot \sigma_f$$



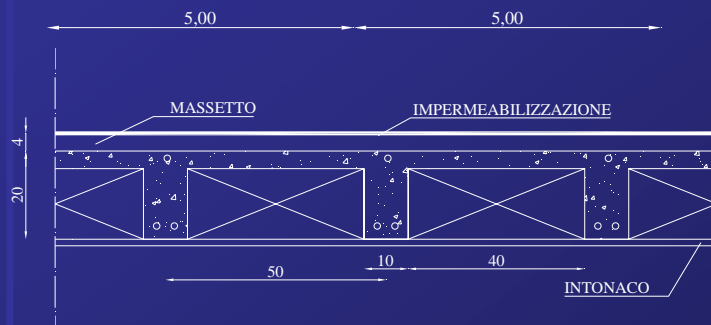
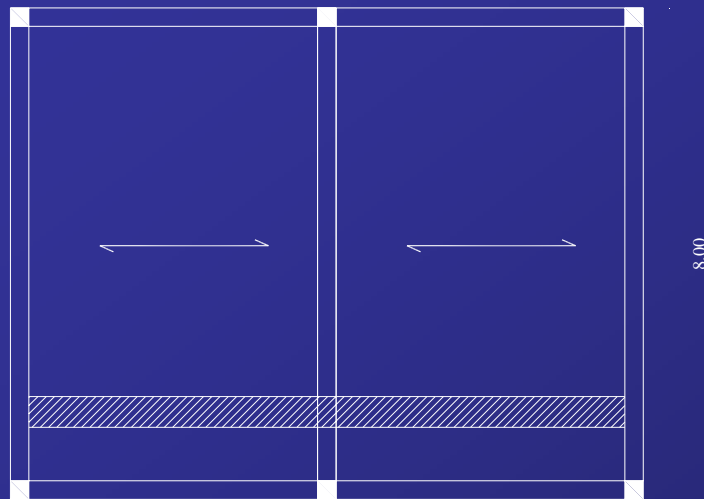
# Rinforzo a flessione: Calcolo del Momento Resistente

- I coefficienti adimensionali  $\psi$  e  $\lambda$  rappresentano, rispettivamente, l'intensità del risultante degli sforzi di compressione e la distanza di quest'ultimo dall'estremo lembo compresso, rapportati nell'ordine a  $b \cdot x \cdot f_{cd}$  ed a  $x$ .
- Nelle zone 1 e 2 l'entità della deformazione esibita dalle barre d'acciaio in trazione è sempre superiore a quella di progetto,  $\varepsilon_{yd}$ .  
Le tensioni di lavoro dell'acciaio sono sempre pari a  $f_{yd}$ .
- Per evitare che allo stato limite ultimo l'acciaio teso sia in campo elastico, il coefficiente adimensionale  $\xi = x/d$  non deve eccedere il valore limite  $\xi_{lim}$ .

$$\xi_{lim} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}}$$



# Rinforzo a flessione: Calcolo delle Sollecitazioni



Carichi Permanenti		
Travetto	0.4	kN/m
Soletta	0.5	kN/m
Pignatte	0.35	kN/m
Massetto	0.38	kN/m
Intonaco	0.15	kN/m
Impermeabilizzazione	0.15	kN/m
<b>TOT</b>	<b>1.9</b>	<b>kN/m</b>

Sovraccarichi Accidentali		
Copertura non praticabile	0.25	kN/m

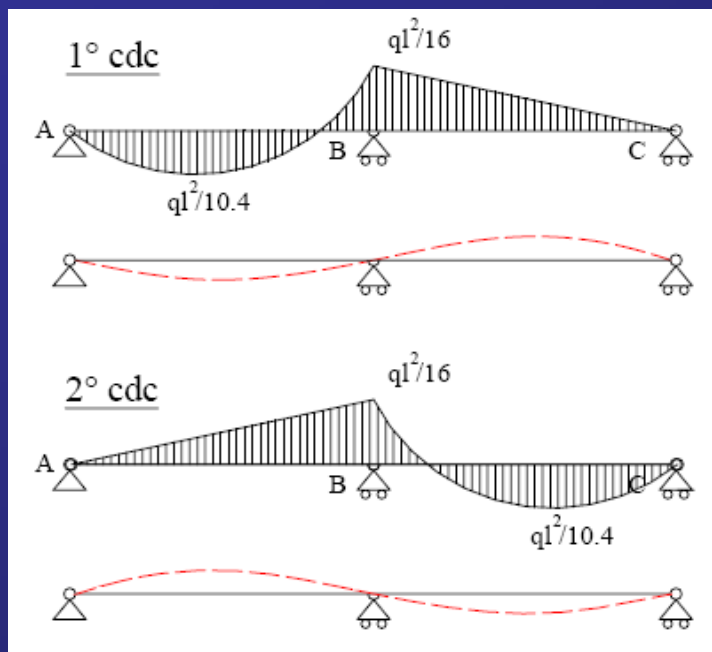
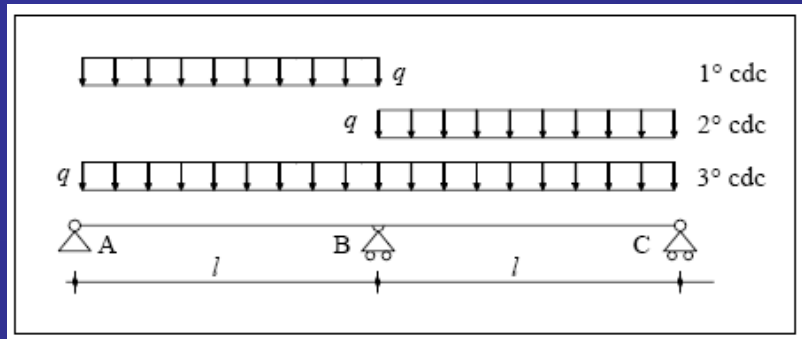
Circ.M.LL.PP. del 04/07/96 n.156  
Istruzioni per l'applicazione delle Norme tecniche relative ai criteri generali per la verifica di sicurezza delle costruzioni e dei carichi e sovraccarichi di cui al decreto ministeriale 16 gennaio 1996.

Prospetto 5.1.  
Sovraccarichi variabili per edifici

Cat.	TIPO DI LOCALE	Verticali	Verticali	Orizzontali
		ripartiti kN m <sup>2</sup>	concentrati kN m	lineari
7	Coperture:			
	non accessibili	0,50	1,20	—
	— accessibili: secondo categoria di appartenenza (da 1 a 4)	—	—	—
	— speciali (impianti, eliporti, altri): secondo il caso	—	—	—

1.4*Carichi Permanenti	2.70 kNm	1.5*Sovraccarichi Accidentali	0.37kN/m
------------------------	----------	-------------------------------	----------

# Rinforzo a Flessione: Condizioni di carico



$$M_{sd} = 7.4 \text{ kNm}$$

# Rinforzo a Flessione

## Dati: Sezione non rinforzata

### Calcestruzzo:

$$R_{ck} = 20 \text{ Mpa}$$

$$f_{cd} = 11.0 \text{ Mpa}$$

### Geometria:

$$b = 500 \text{ mm}$$

$$h = 200 \text{ mm}$$

$$d = 30 \text{ mm}$$

### Acciaio:

$$f_{yk} = 440 \text{ Mpa}$$

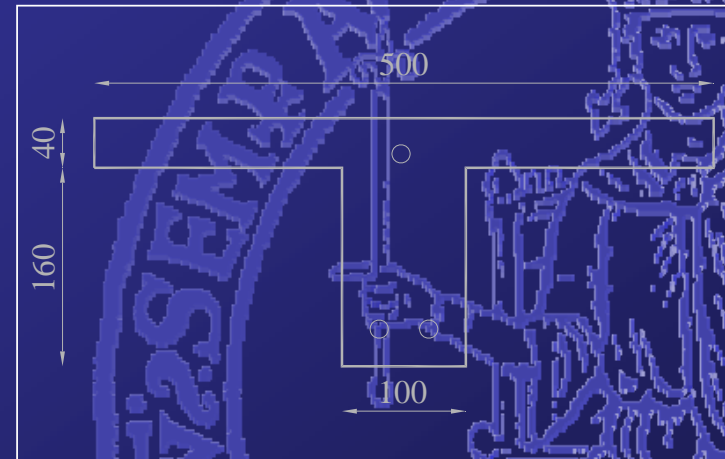
$$E_s = 210 \text{ Gpa}$$

$$f_{yd} = 374 \text{ Mpa}$$

$$\varepsilon_{yd} = 0.00182$$

$$A_{s1} = 1\Phi10 = 79 \text{ mm}^2$$

$$A_{s2} = 2\Phi10 = 157 \text{ mm}^2$$



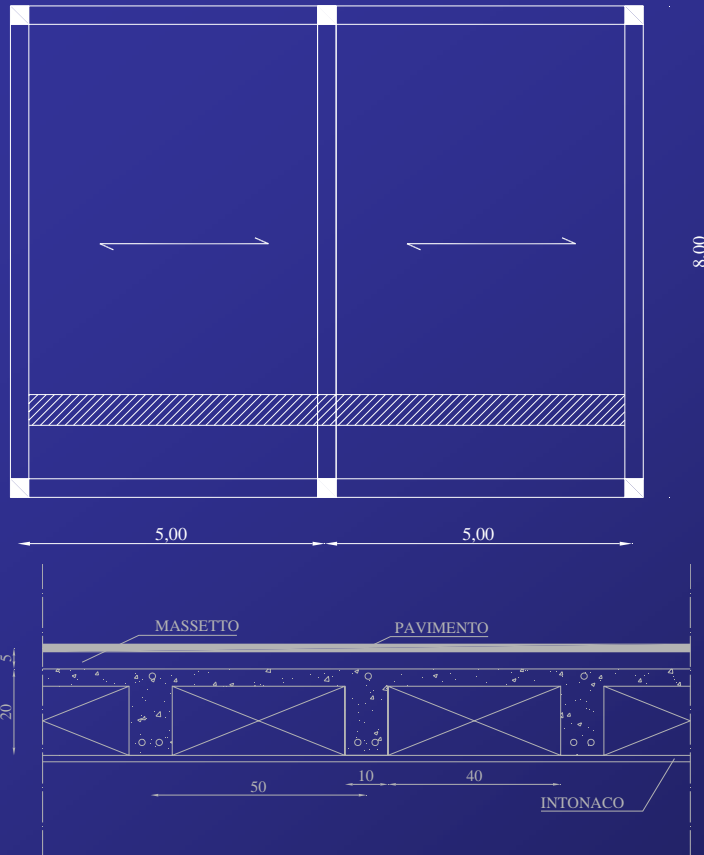
Eq. equilibrio alla traslazione lungo l'asse della trave

$$0 = \psi \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} + \sigma_{s1} \cdot A_{s1} - \sigma_{s2} \cdot A_{s2} \quad \longrightarrow \quad x = 24.6 \text{ mm}$$

Eq. equilibrio rotazione intorno all'asse baricentrico armatura tesa

$$M_u = \psi \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (d - \lambda \cdot x) + A_{s1} \cdot \sigma_{s1} \cdot (x - d_1) + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d - d_2) = 9.7 \text{ kNm}$$

# Rinforzo a flessione: Calcolo delle Sollecitazioni



Carichi Permanenti		
Travetto	0.4	kN/m
Soletta	0.5	kN/m
Pignatte	0.35	kN/m
Massetto	0.38	kN/m
Intonaco	0.15	kN/m
Pavimento	0.30	kN/m
Impermeabilizzazione	0.15	kN/m
<b>TOT</b>	<b>2.2</b>	<b>kN/m</b>

Sovraccarichi Accidentali		
Copertura non praticabile	1.0	kN/m

Circ.M.LL.PP. del 04/07/96 n.156  
Istruzioni per l'applicazione delle Norme tecniche relative ai criteri generali per la verifica di sicurezza delle costruzioni e dei carichi e sovraccarichi di cui al decreto ministeriale 16 gennaio 1996.

Prospetto 5.1.  
Sovraccarichi variabili per edifici

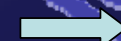
Cat.	TIPO DI LOCALE	Verticali	Verticali	Orizzontali
		ripartiti kN m <sup>2</sup>	concentrati kN m	lineari kN m
1	Ambienti non suscettibili di affollamento (locali abitazione e relativi servizi, alberghi, uffici non aperti al pubblico) e relativi terrazzi a livello praticabili	2,00	2,00	1,00

1.4\*Carichi Permanenti

3.1 kN/m

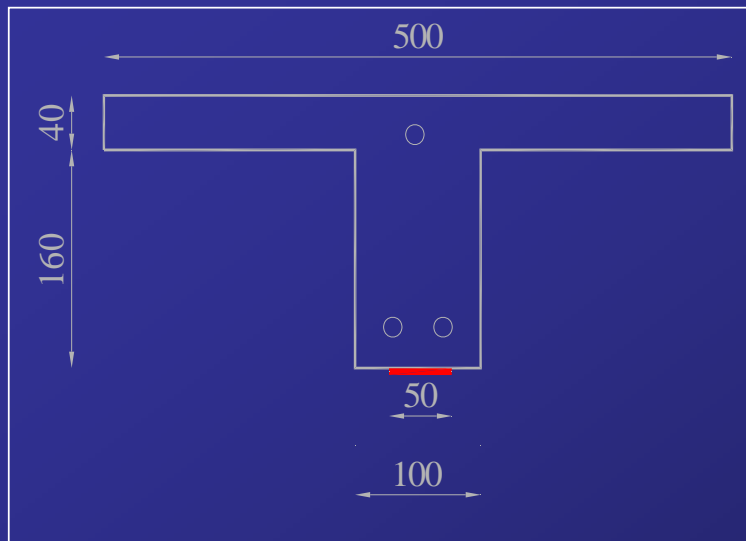
1.5\*Sovraccarichi Accidentali

1.5kN/m



$M_{sd} = 11.1 \text{ kNm}$

# Rinforzo a Flessione: Calcolo del Momento Ultimo



DATI TECNICI (valori tipici):						
DATI IDENTIFICATIVI DEL PRODOTTO						
Matrice:	resina epossidica					
Rinforzo:	fibre di carbonio ad alta resistenza					
Colore:	nero					
CARATTERISTICHE DEL PRODOTTO						
	Carboplate E 170			Carboplate E 250		
Densità (g/cm³):	1,61			1,61		
Contenuto di fibre (%):	68			65		
Spessore (mm):	1,4			1,4		
Larghezza (mm):	50	100	150	50	100	150
Sezione resistente (mm²):	70	140	210	70	140	210
Peso (g/m):	113	225	338	113	225	338
PRESTAZIONI FINALI						
Resistenza a trazione (MPa):	≥ 3.100			2.500		
Modulo elastico (GPa):	170			250		
Allungamento a rottura (%):	2			0,9		
Resistenza a taglio (MPa):	77			79		
Coefficiente di dilatazione termica (m/m°C):	0,6 x 10 <sup>-6</sup>			0,4 x 10 <sup>-6</sup>		



# Rinforzo a Flessione: Calcolo del Momento Ultimo

## Calcolo di $k_b$

$$b = 100 \text{ mm}$$

$$b_f = 50 \text{ mm}$$



$$b_f / b = 0.5$$



$$k_b = \sqrt{\frac{2 - \frac{b_f}{b}}{1 + \frac{b_f}{400}}} = 1.15 > 1 \text{ OK}$$

## Calcolo di $\Gamma_{Fd}$

$$f_{ck} = 0.83 R_{ck} = 16.60 \text{ Mpa}$$

$$f_{ctm} = \text{flessione} = 0.27 \times (R_{ck})^{(2/3)} = 2.0 \text{ Mpa}$$

$$\gamma_c = 1.6$$

$$\Gamma_{Fk} = 0.03 \cdot k_b \cdot \sqrt{f_{ck} \cdot f_{ctm}} = 0.2$$

# Rinforzo a Flessione: Calcolo del Momento Ultimo

## Calcolo di $f_{fdd}$

$$k_c = 3$$

$$\gamma_{Rd} = \text{flessione} = 1.00$$

$$E_f = 170000 \text{ Mpa}$$

$$t_f = \text{spessore totale rinforzo} = 1 \times 1.4 = 1.4 \text{ mm}$$

$$\Gamma_{Fd} = 0.20$$



$$f_{fdd} = \frac{1}{\gamma_{fd} \cdot \sqrt{\gamma_c}} \sqrt{\frac{2E_f \Gamma_{Fk}}{t_f}} = 434 \text{ MPa}$$

Tabella 3-3 – Coefficienti parziali  $\gamma_{Rd}$ .

Modello di resistenza	$\gamma_{Rd}$
Flessione/Pressoflessione	1.00
Taglio/Torsione	1.20
Confinamento	1.10

# Rinforzo a Flessione: Calcolo del Momento Ultimo

## Calcolo di $\varepsilon_{fd}$

$$\eta_a = 0.95$$

$$\varepsilon_{fu} = 0.018$$

$$\gamma_f = 1.2 \text{ (Applic. Tipo A)}$$



$$\eta_a \frac{\varepsilon_{fu}}{\gamma_f} = 0.0144$$

$$k_{cr} = 3$$

$$f_{fdd} = 434 \text{ Mpa}$$

$$E_f = 170000 \text{ Mpa}$$



$$\varepsilon_{f,max} = k_{cr} \cdot \frac{f_{fdd}}{E_f} = 0.0026$$

$$\varepsilon_{fd} = \min \left\{ \eta_a \frac{\varepsilon_{fu}}{\gamma_f}, \varepsilon_{f,max} \right\} = 0.0026$$

# Rinforzo a Flessione: Calcolo del Momento Ultimo

## Calcolo del Momento Ultimo

Regione di rottura: 1

Rottura per raggiungimento deformazione elastica limite di progetto nelle fibre

$x$  = profondità asse neutro = 29.7 mm

$\xi = x/h = 0.149$

$\psi = 0.6745$

$\lambda = 0.3765$

$\sigma_{s2} = 374$  Mpa

$\sigma_f = 434$  Mpa

$M_u = 14.9$  kN m



# Rinforzo a Flessione: Travetto Solaio

Sezione originale:  $M_u = 9.70 \text{ kN m}$

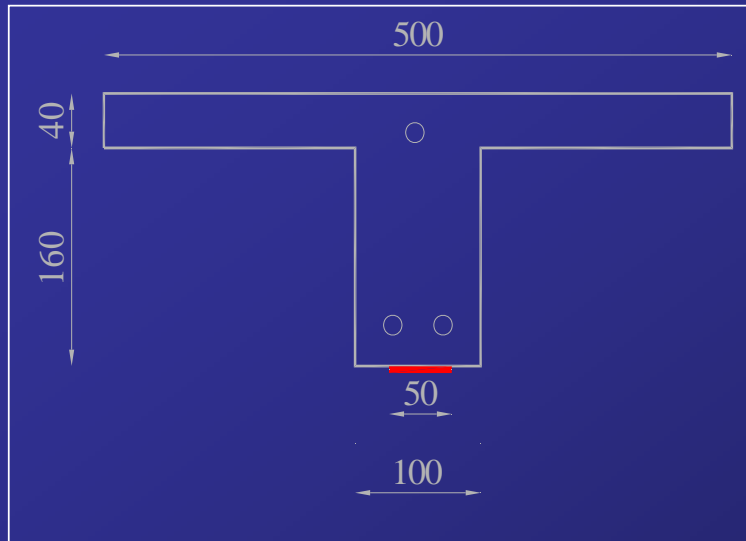
Sezione rinforzata:  $M_u = 14.90 \text{ kN m}$



L'utilizzo del rinforzo ha apportato un incremento in termini di capacità di resistenza a flessione pari al 53% della capacità originaria



# Rinforzo a Flessione (2): Calcolo del Momento Ultimo



## DATI TECNICI (valori tipici)

### DATI IDENTIFICATIVI

Tipo di fibra:	carbonio ad alta resistenza
Aspetto:	tessuto unidirezionale
Voce doganale:	6815 10 10

### MAPEWRAP C UNI-AX

Grammatura (g/m <sup>2</sup> ):	300	600
Massa volumica (kg/m <sup>3</sup> ):	1.800	1.800
Spessore equivalente di tessuto secco (mm):	0,166	0,333
Area resistente per unità di larghezza (mm <sup>2</sup> /m):	166,6	333,3
Resistenza meccanica a trazione (N/mm <sup>2</sup> ):	4.830	4.830
Carico massimo per unità di larghezza (kN/m):	> 800	> 1.600
Modulo elastico a trazione (N/mm <sup>2</sup> ):	230.000	230.000
Allungamento a rottura (%):	2	2

### MAPEWRAP C UNI-AX HM

Grammatura (g/m <sup>2</sup> ):	300	600
Massa volumica (kg/m <sup>3</sup> ):	1.820	1.820
Spessore equivalente di tessuto secco (mm):	0,164	0,329
Area resistente per unità di larghezza (mm <sup>2</sup> /m):	164,8	329,6
Resistenza meccanica a trazione (N/mm <sup>2</sup> ):	4.410	4.410
Carico massimo per unità di larghezza (kN/m):	> 700	> 1.400
Modulo elastico a trazione (N/mm <sup>2</sup> ):	390.000	390.000
Allungamento a rottura (%):	1,1	1,1

### PRESTAZIONI FINALI

Adesione al calcestruzzo (N/mm <sup>2</sup> ):	> 3 (rottura del supporto)
--	----------------------------

# Rinforzo a Flessione: Calcolo del Momento Ultimo

## Calcolo di $k_b$

$$b = 100 \text{ mm}$$

$$b_f = 50 \text{ mm}$$



$$b_f / b = 0.5$$



$$k_b = \sqrt{\frac{2 - \frac{b_f}{b}}{1 + \frac{b_f}{400}}} = 1.15 > 1 \text{ OK}$$

## Calcolo di $\Gamma_{Fd}$

$$f_{ck} = 0.83 R_{ck} = 16.60 \text{ Mpa}$$

$$f_{ctm} = \text{flessione} = 0.27 \times (R_{ck})^{(2/3)} = 2.0 \text{ Mpa}$$

$$\gamma_c = 1.6$$

$$\Gamma_{Fk} = 0.03 \cdot k_b \cdot \sqrt{f_{ck} \cdot f_{ctm}} = 0.2$$

# Rinforzo a Flessione: Calcolo del Momento Ultimo

## Calcolo di $f_{fdd}$

$$k_c = 3$$

$$\gamma_{Rd} = \text{flessione} = 1.00$$

$$E_f = 230000 \text{ Mpa}$$

$$t_f = \text{spessore totale rinforzo} = 1 \times 0.166 = 0.166 \text{ mm}$$

$$\Gamma_{Fd} = 0.20$$



$$f_{fdd} = \frac{1}{\gamma_{fd} \cdot \sqrt{\gamma_c}} \sqrt{\frac{2E_f \Gamma_{Fk}}{t_f}} = 1467 \text{ MPa}$$

Tabella 3-3 – Coefficienti parziali  $\gamma_{Rd}$ .

Modello di resistenza	$\gamma_{Rd}$
Flessione/Pressoflessione	1.00
Taglio/Torsione	1.20
Confinamento	1.10

# Rinforzo a Flessione: Calcolo del Momento Ultimo

## Calcolo di $\varepsilon_{fd}$

$$\eta_a = 0.95$$

$$\varepsilon_{fu} = 0.021$$

$$\gamma_f = \text{Applic. Tipo A} = 1.2$$



$$\eta_a \frac{\varepsilon_{fu}}{\gamma_f} = 0.0166$$

$$k_{cr} = 3$$

$$f_{fdd} = 1467 \text{ Mpa}$$

$$E_f = 230000 \text{ Mpa}$$



$$\varepsilon_{f,max} = k_{cr} \cdot \frac{f_{fdd}}{E_f} = 0.0063$$

$$\varepsilon_{fd} = \min \left\{ \eta_a \frac{\varepsilon_{fu}}{\gamma_f}, \varepsilon_{f,max} \right\} = 0.0063$$

# Rinforzo a Flessione: Calcolo del Momento Ultimo

## Calcolo del Momento Ultimo

Regione di rottura: 1

Rottura per raggiungimento deformazione elastica limite di progetto nelle fibre

$x$  = profondità asse neutro = 26.35 mm

$\xi = x/h = 0.1317$

$\psi = 0.6228$

$\lambda = 0.3681$

$\sigma_{s2} = 374$  Mpa

$\sigma_f = 1467$  Mpa

$M_u = 11.7$  kN m



## Rinforzo a Flessione (2): Travetto Solaio

Sezione originale:  $M_u = 9.70 \text{ kN m}$

Sezione rinforzata:  $M_u = 11.70 \text{ kN m}$



L'utilizzo del rinforzo ha apportato un incremento in termini di capacità di resistenza a flessione pari al 21% della capacità originaria



# Rinforzo a Flessione: Trave

## Calcestruzzo:

$$R_{ck} = 20 \text{ Mpa}$$

$$f_{cd} = 11.0 \text{ Mpa}$$

## Acciaio:

$$f_{yk} = 440 \text{ Mpa}$$

$$E_s = 210 \text{ Gpa}$$

$$f_{yd} = 374 \text{ Mpa}$$

$$\varepsilon_{yd} = 0.00182$$

## Geometria:

$$b = 300 \text{ mm} \quad A_{s1} = 2\Phi 16 = 402 \text{ mm}^2$$

$$h = 500 \text{ mm} \quad A_{s2} = 4\Phi 16 = 804 \text{ mm}^2$$

$$d = 30 \text{ mm}$$

$$M_{sd} = 123.08 \text{ kNm}$$

Eq. equilibrio alla traslazione lungo l'asse della trave

$$0 = \psi \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} + \sigma_{s2} \cdot A_{s2} \quad \longrightarrow \quad b = 89.40 \text{ mm}$$

Eq. equilibrio rotazione intorno all'asse baricentrico armatura tesa

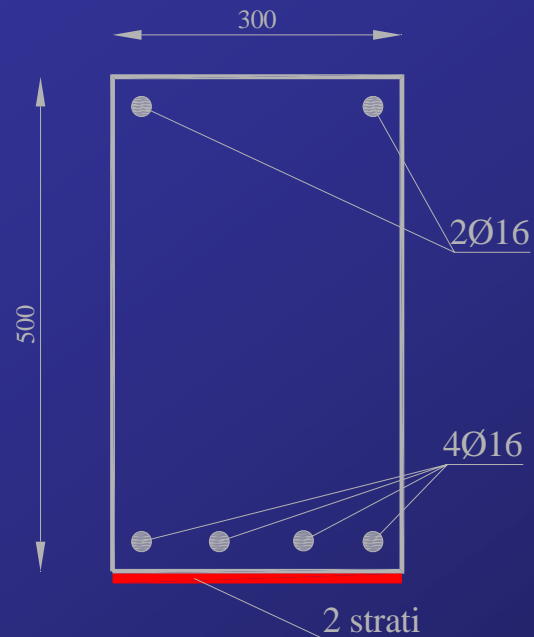
$$M_u = \psi \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (d - \lambda \cdot x) + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d - d_2) = 132.00 \text{ kNm}$$



# Rinforzo a Flessione: Esempi Numerici

## Trave

$$M_{sd} = 184.9 \text{ kNm}$$



DATI TECNICI (valori tipici)		
<b>DATI IDENTIFICATIVI</b>		
Tipo di fibra:	carbonio ad alta resistenza	
Aspetto:	tessuto unidirezionale	
Voce doganale:	6815 10 10	
<b>MAPEWRAP C UNI-AX</b>		
Grammatura (g/m <sup>2</sup> ):	300	600
Massa volumica (kg/m <sup>3</sup> ):	1.800	1.800
Spessore equivalente di tessuto secco (mm):	0,166	0,333
Area resistente per unità di larghezza (mm <sup>2</sup> /m):	166,6	333,3
Resistenza meccanica a trazione (N/mm <sup>2</sup> ):	4.830	4.830
Carico massimo per unità di larghezza (kN/m):	> 800	> 1.600
Modulo elastico a trazione (N/mm <sup>2</sup> ):	230.000	230.000
Allungamento a rottura (%):	2	2
<b>MAPEWRAP C UNI-AX HM</b>		
Grammatura (g/m <sup>2</sup> ):	300	600
Massa volumica (kg/m <sup>3</sup> ):	1.820	1.820
Spessore equivalente di tessuto secco (mm):	0,164	0,329
Area resistente per unità di larghezza (mm <sup>2</sup> /m):	164,8	329,6
Resistenza meccanica a trazione (N/mm <sup>2</sup> ):	4.410	4.410
Carico massimo per unità di larghezza (kN/m):	> 700	> 1.400
Modulo elastico a trazione (N/mm <sup>2</sup> ):	390.000	390.000
Allungamento a rottura (%):	1,1	1,1
<b>PRESTAZIONI FINALI</b>		
Adesione al calcestruzzo (N/mm <sup>2</sup> ):	> 3 (rottura del supporto)	

# Rinforzo a Flessione: Trave

## Calcolo di $k_b$

$$b = 300 \text{ mm}$$

$$b_f = 300 \text{ mm}$$

$$b_f / b = 1.0$$

$$k_b = \sqrt{\frac{2 - \frac{b_f}{b}}{1 + \frac{b_f}{400}}} = 0.76 < 1 [1]$$

## Calcolo di $\Gamma_{Fd}$

$$f_{ck} = 0.83 R_{ck} = 16.60 \text{ Mpa}$$

$$f_{ctm} = \text{flessione} = 0.27 \times (R_{ck})^{(2/3)} = 2.00 \text{ Mpa}$$

$$\gamma_c = 1.6$$

$$\Gamma_{Fk} = 0.03 \cdot k_b \cdot \sqrt{f_{ck} \cdot f_{ctm}} = 0.17$$

# Rinforzo a Flessione: Trave

## Calcolo di $f_{fdd}$

$$k_c = 3$$

$$\gamma_{Rd} = \text{flessione} = 1.00$$

$$E_f = 390000 \text{ Mpa}$$

$$t_f = \text{spessore totale rinforzo} = 2 \times 0.329 = 0.658 \text{ mm}$$

$$\Gamma_{Fd} = 0.17$$

Tabella 3-3 – Coefficienti parziali  $\gamma_{Rd}$ .

Modello di resistenza	$\gamma_{Rd}$
Flessione/Pressoflessione	1.00
Taglio/Torsione	1.20
Confinamento	1.10



$$f_{fdd} = \frac{1}{\gamma_{fd} \cdot \sqrt{\gamma_c}} \sqrt{\frac{2E_f \Gamma_{Fk}}{t_f}} = 893 \text{ MPa}$$

# Rinforzo a Flessione: Trave

## Calcolo di $\varepsilon_{fd}$

$$\eta_a = 0.95$$

$$\varepsilon_{fu} = 0.011$$

$$\gamma_f = 1.2 \text{ ( Applic. Tipo A)}$$



$$\eta_a \frac{\varepsilon_{fu}}{\gamma_f} = 0.0090$$

$$k_{cr} = 3$$

$$f_{fdd} = 893 \text{ Mpa}$$

$$E_f = 390000 \text{ Mpa}$$



$$\varepsilon_{f,max} = k_{cr} \cdot \frac{f_{fdd}}{E_f} = 0.0023$$

$$\varepsilon_{fd} = \min \left\{ \eta_a \frac{\varepsilon_{fu}}{\gamma_f}, \varepsilon_{f,max} \right\} = 0.0023$$

# Rinforzo a Flessione: Trave

## Calcolo del Momento Ultimo

Regione di rottura: 1

Rottura per raggiungimento deformazione elastica limite di progetto nelle fibre

$x$  = profondità asse neutro = 181 mm

$\xi = x/h = 0.3616$

$\psi = 0.8095$

$\lambda = 0.4160$

$\sigma_{s2} = 374$  Mpa

$\sigma_f = 893$  Mpa

$M_u = 197.8$  kN m





## Rinforzo a Flessione: Trave

Sezione originale:  $M_u = 132.0 \text{ kN m}$

Sezione rinforzata:  $M_u = 197.8 \text{ kN m}$



L'utilizzo del rinforzo ha apportato un incremento in termini di capacità di resistenza a flessione pari al 50% della capacità originaria

# Rinforzo a Taglio

## Esempi numerici



# Rinforzo a Taglio

## Calcolo resistenza a taglio sezione in c.a.:

$$V_{rd} = \min \{ V_{Rd,max}; V_{cd} + V_{wd} \} = 127 \text{ kN}$$

Resistenza biella compressa  
di calcestruzzo:

$$V_{Rd,max} = 0,30 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d$$

$$V_{Rd,max} = 373 \text{ kN}$$

Somma contributo calcestruzzo più  
contributo armatura a taglio

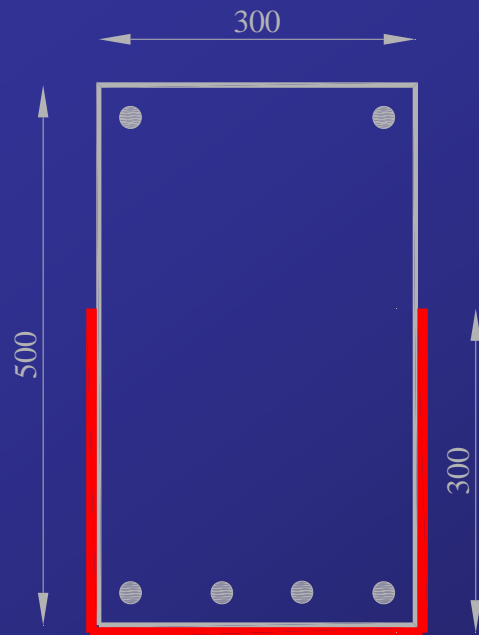
$$V_{cd} = 0,60 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \cdot \delta$$

$$V_{wd} = A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \frac{0,90d}{s} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$V_{cd} = 74 \text{ kN}$$

$$V_{wd} = 53 \text{ kN}$$

# Rinforzo a Taglio: Trave tipo U-Jacket



DATI TECNICI (valori tipici)		
<b>DATI IDENTIFICATIVI</b>		
Tipo di fibra:	carbonio ad alta resistenza	
Aspetto:	tessuto unidirezionale	
Voce doganale:	6815 10 10	
<b>MAPEWRAP C UNI-AX</b>		
Grammatura (g/m <sup>2</sup> ):	300	600
Massa volumica (kg/m <sup>3</sup> ):	1.800	1.800
Spessore equivalente di tessuto secco (mm):	0,166	0,333
Area resistente per unità di larghezza (mm <sup>2</sup> /m):	166,6	333,3
Resistenza meccanica a trazione (N/mm <sup>2</sup> ):	4.830	4.830
Carico massimo per unità di larghezza (kN/m):	> 800	> 1.600
Modulo elastico a trazione (N/mm <sup>2</sup> ):	230.000	230.000
Allungamento a rottura (%):	2	2
<b>MAPEWRAP C UNI-AX HM</b>		
Grammatura (g/m <sup>2</sup> ):	300	600
Massa volumica (kg/m <sup>3</sup> ):	1.820	1.820
Spessore equivalente di tessuto secco (mm):	0,164	0,329
Area resistente per unità di larghezza (mm <sup>2</sup> /m):	164,8	329,6
Resistenza meccanica a trazione (N/mm <sup>2</sup> ):	4.410	4.410
Carico massimo per unità di larghezza (kN/m):	> 700	> 1.400
Modulo elastico a trazione (N/mm <sup>2</sup> ):	390.000	390.000
Allungamento a rottura (%):	1,1	1,1
<b>PRESTAZIONI FINALI</b>		
Adesione al calcestruzzo (N/mm <sup>2</sup> ):	> 3 (rottura del supporto)	

# Rinforzo a Taglio

## Calcolo resistenza a taglio sezione in c.a.:

$$V_{Rd} = \min \{ V_{Rd,ct} + V_{Rd,s} + V_{Rd,f}, V_{Rd,max} \}$$



$V_{Rd,ct}$  contributo del calcestruzzo

$V_{Rd,s}$  contributo dell'armatura trasversale di acciaio, "da valutarsi in accordo con i Codici e la Letteratura Tecnica più recente"

$V_{Rd,f}$  contributo del rinforzo di FRP

$V_{Rd,max}$  resistenza della biella compressa di calcestruzzo, "da valutarsi in accordo con i Codici e la Letteratura Tecnica più recente".

# Rinforzo a Taglio: Rinforzo Continuo tipo U-Jacket

$$V_{Rd,f} = \frac{1}{\gamma_{Rd}} \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{fed} \cdot 2 \cdot t_f \cdot (\cot \theta + \cot \beta) \cdot \frac{w_f}{p_f}$$

$\gamma_{Rd}$	coefficiente parziale per modello di resistenza pari a 1,20 (CNR Punto 3.4.1 Tabella 3.3)
$d$	altezza utile della sezione
$h_w$	larghezza della membratura resistente a taglio
$t_f$	spessore del rinforzo di FRP
$\beta$	angolo di inclinazione delle fibre rispetto all'asse dell'elemento
$\theta$	angolo di inclinazione delle fessure da taglio rispetto all'asse dell'elemento (in mancanza di determinazione più accurata, si può assumere $\theta = 45^\circ$ )
$w_f$	larghezza delle strisce
$p_f$	passo delle strisce

I valori di  $w_f$  e di  $p_f$  devono essere misurati ortogonalmente alla direzione delle fibre e, nel caso di strisce poste in adiacenza o di fogli, il rapporto è pari ad 1,0.



# Rinforzo a Taglio: Rinforzo Continuo tipo U-Jacket

$$f_{fed} = f_{fdd} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{l_c \cdot \sin \beta}{\min\{0,9 \cdot d; h_w\}} \right] \quad \text{[tensione di progetto del rinforzo]}$$

$$f_{fdd} = \frac{1}{\gamma_{f,d} \cdot \sqrt{\gamma_c}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_f \cdot \Gamma_{Fk}}{t_f}}$$

$$\Gamma_{Fk} = 0.03 \cdot k_b \cdot \sqrt{f_{ck} \cdot f_{ctm}}$$

nel caso di rinforzi continui,  $b_f = b = \min\{0,9 \cdot d; h_w\} \cdot \frac{\sin(\theta + \beta)}{\sin \theta}$  essendo  $h_w$  l'altezza dell'anima della trave.

$$l_c = \sqrt{\frac{E_f \cdot t_f}{2 \cdot f_{ctm}}} \quad \text{[lunghezze in mm]}$$

**Punto 4.3.3.3:** "Nel caso di disposizione ad U ed in avvolgimento, gli spigoli della sezione dell'elemento da rinforzare a contatto con il materiale composito devono essere arrotondati, in modo da evitare il tranciamento del rinforzo. Il raggio di curvatura, dell'arrotondamento deve essere non minore di 20 mm."

# Rinforzo a Taglio

## Calcolo di $k_b$

$$b_f = b = \min(423; 300) = 300$$



$$k_b = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{b_f}{b}}{1 + \frac{b_f}{400}}} = 0.76 < 1 \quad [1]$$

## Calcolo di $\Gamma_{Fd}$

$$f_{ck} = 0.83 R_{ck} = 16.60 \text{ Mpa}$$

$$f_{ctm} = \text{flessione} = 0.27 \times (R_{ck})^{(2/3)} = 2.00 \text{ Mpa}$$

$$\gamma_c = 1.6$$

$$\Gamma_{Fk} = 0.03 \cdot k_b \cdot \sqrt{f_{ck} \cdot f_{ctm}} = 0.17$$

# Rinforzo a Taglio

## Calcolo di $f_{fdd}$

$$k_c = 3$$

$$\gamma_{Rd} = \text{Taglio} = 1.20$$


$$\gamma_{fd} = (\text{Applic. Tipo A}) = 1.20$$

$$E_f = 390000 \text{ Mpa}$$

$$t_f = \text{spessore totale rinforzo} = 1 \times 0.329 = 0.329 \text{ mm}$$

$$\Gamma_{Fk} = 0.17$$

Modello di resistenza	$\gamma_{Rd}$
Flessione/Pressoflessione	1.00
Taglio/Torsione	1.20
Confinamento	1.10


$$f_{fdd} = \frac{1}{\gamma_{fd} \cdot \sqrt{\gamma_c}} \sqrt{\frac{2E_f \Gamma_{Fk}}{t_f}} = 421 \text{ MPa}$$

# Rinforzo a Taglio

$$l_e = \sqrt{\frac{E_f \cdot t_f}{2 \cdot f_{ctm}}} = 185 \text{ mm}$$

$$f_{fdd} = \frac{1}{\gamma_{f,d} \cdot \sqrt{\gamma_c}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_f \cdot \Gamma_{Fk}}{t_f}} = 421 \text{ MPa}$$

$$f_{fed} = f_{fdd} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{l_e \cdot \sin \beta}{\min \{0,9 \cdot d; h_w\}} \right] = 337 \text{ MPa}$$



$$V_{Rd,f} = \frac{1}{\gamma_{Rd}} \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{fed} \cdot 2 \cdot t_f \cdot (\cot \theta + \cot \beta) \cdot \frac{w_f}{p_f} = 78 \text{ kN}$$

$$V_{Rd} = \min \{ V_{Rd,ct} + V_{Rd,s} + V_{Rd,f}, V_{Rd,max} \}$$

$$V_{Rd,ct} = 74 \text{ kN} \quad V_{Rd,s} = 53 \text{ kN} \quad V_{Rd,f} = 78 \text{ kN}$$

$$V_{Rd,max} = 373 \text{ kN}$$

$$V_{Rd} = \min \{ 373; 205 \} = 205 \text{ kN}$$

# Rinforzo a Taglio

Sezione originale:  $V_{rd} = 127 \text{ kN m}$

Sezione rinforzata:  $V_{rd} = 205 \text{ kN m}$



L'utilizzo del rinforzo ha apportato un incremento in termini di capacità di resistenza a taglio pari al 62% della capacità originaria

Tale valore è superiore a quello consentito dalla norma che prevede un valore di incremento massimo di resistenza pari al 60% di quello della sezione non rinforzata.