

ORDINE DEGLI INGEGNERI

Corso di aggiornamento sulla normativa sismica
gen. 2007 – mar. 2007

INTRODUZIONE AI METODI DI CONTROLLO DELLA SICUREZZA

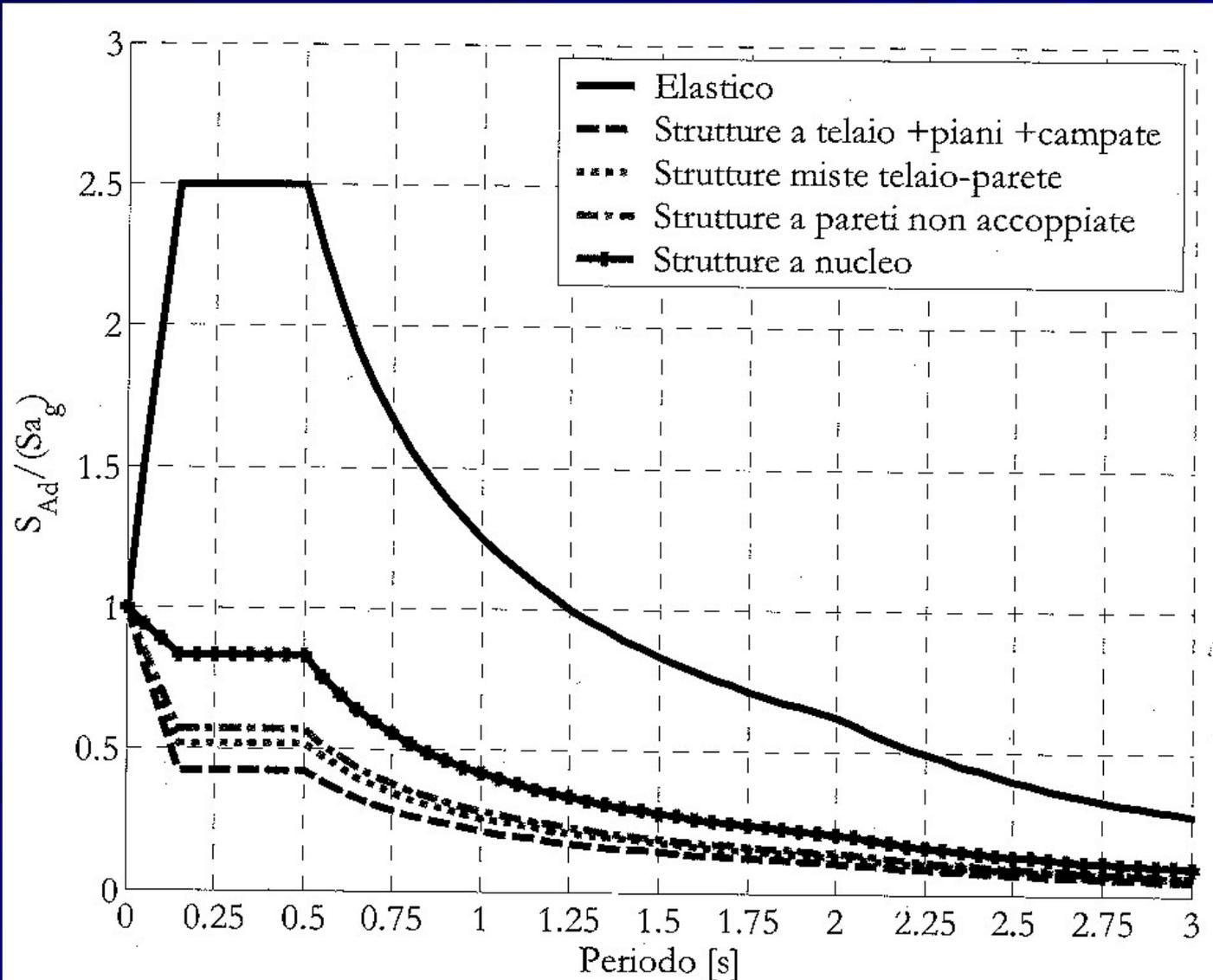


Prof. Ciro FAELLA

Dipartimento di Ingegneria Civile

Università di Salerno

Spettro elastico e spettri di progetto



Requisiti generali delle costruzioni dal punto di vista della funzionalità e della sicurezza

- **Le principali domande cui bisogna rispondere nel costruire riguardano come costruire in modo da garantire**
 - **che le strutture non crollino, poiché la perdita di vite umane è sempre inaccettabile,**
 - **che esse abbiano standard qualitativi elevati, ovvero siano adeguate alle funzioni per le quali sono costruite, ma**
 - **che siano poco costose e contemporaneamente durevoli, in quanto l'economicità della costruzione deriva sia dal costo iniziale di realizzazione dell'opera sia dal costo differito per garantirne con adeguata manutenzione la conservazione nel tempo.**

PARAMETRI PER LA VALUTAZIONE DELLA SICUREZZA

- I parametri che influenzano il processo decisionale che converge nella definizione del progetto della generica struttura possono ricondursi essenzialmente ai seguenti:
 - le azioni cui la struttura deve resistere e quindi da considerare nel progetto;
 - le caratteristiche meccaniche dei materiali che costituiscono la struttura portante;
 - i modelli di calcolo che consentono la analisi strutturale per la determinazione delle sollecitazioni e della capacità di resistenza della generica struttura.

Le azioni sulle costruzioni

- Le azioni da considerare si possono dividere in tre categorie:
 - azioni dirette costituite dal peso proprio, altri carichi fissi, carichi di esercizio, altri carichi variabili come neve, vento, sisma, azioni dinamiche;
 - azioni indirette determinate da variazioni termiche, deformazioni viscosi, ritiro, precompressione, cedimenti vincolari;
 - azioni chimico-fisiche dovute ad agenti aggressivi come ambienti chimicamente aggressivi, umidità, gelo.

Problematiche relative

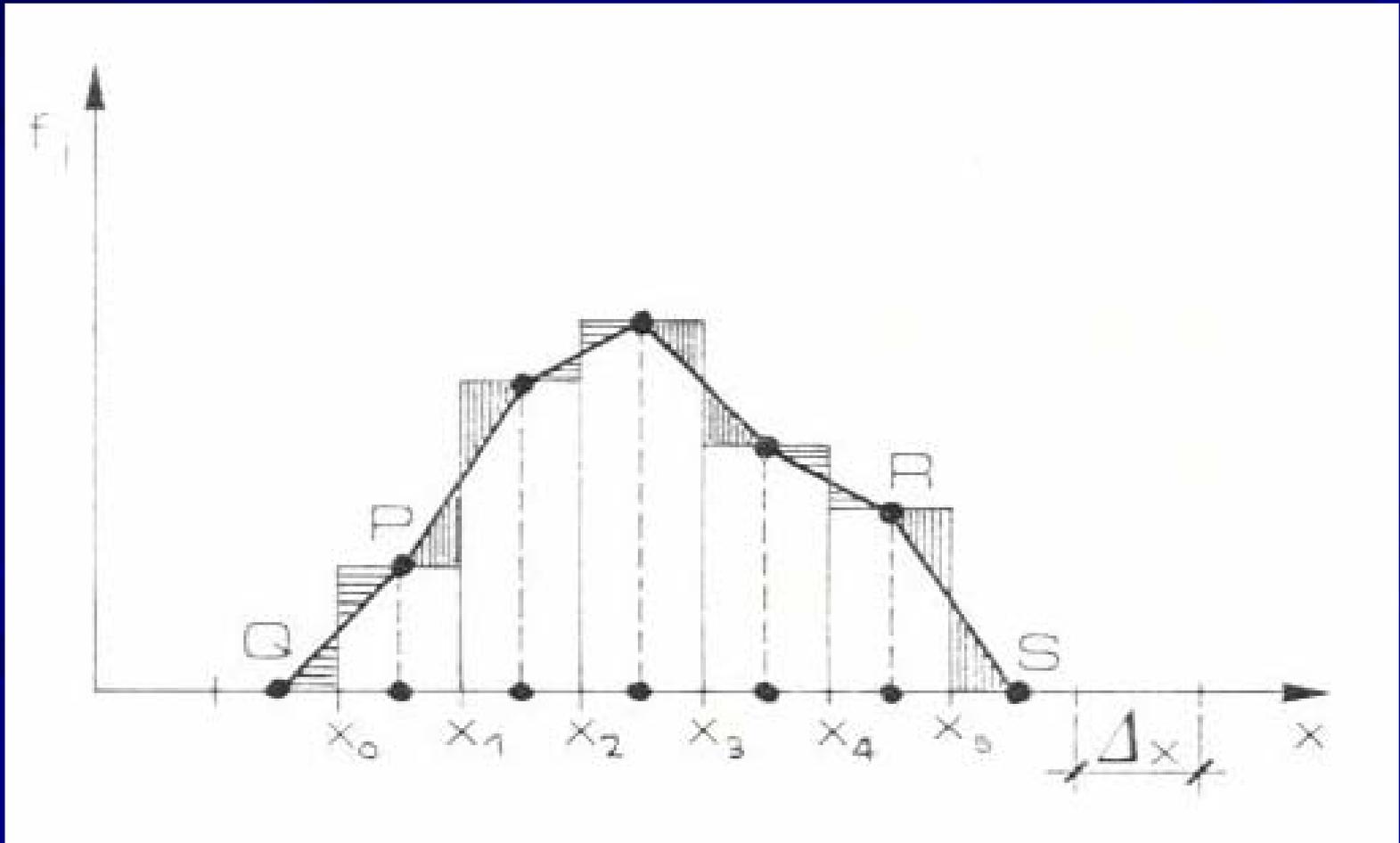
- Problema più complesso è la definizione dell'entità delle azioni da prendere in conto. Mentre infatti il peso proprio ed in parte i carichi fissi possono essere oggetto di una determinazione sufficientemente accurata, più difficile risulta definire valori per le azioni rimanenti. La definizione di valori di progetto non può prescindere da valutazioni probabilistiche che affondano le radici in valutazioni statistiche dei valori effettivamente osservati in condizioni simili.
- E' il caso del vento, della neve, delle variazioni termiche, delle deformazioni viscoso, delle azioni sismiche. La valutazione dell'entità delle azioni variabili deve poi tener conto della durata prevedibile della generica costruzione perché al crescere di questa aumenta la probabilità di azioni di maggiore intensità, ed inoltre della entità del danno che la sua inadeguatezza potrebbe determinare.
- Per questa ragione edifici suscettibili di grande affollamento o fondamentali per la protezione civile (ospedali, caserme dei vigili del fuoco, scuole, luoghi di culto, teatri) richiedono ai sensi delle moderne normative un maggior grado di sicurezza a parità di azioni, ovvero, un uguale grado di sicurezza per azioni più rilevanti e meno frequenti. Altre costruzioni, destinate ad una vita più breve, ovvero con scarsa incidenza sulla sicurezza delle persone, possono essere costruite con azioni variabili di minore entità.

Le caratteristiche dei materiali

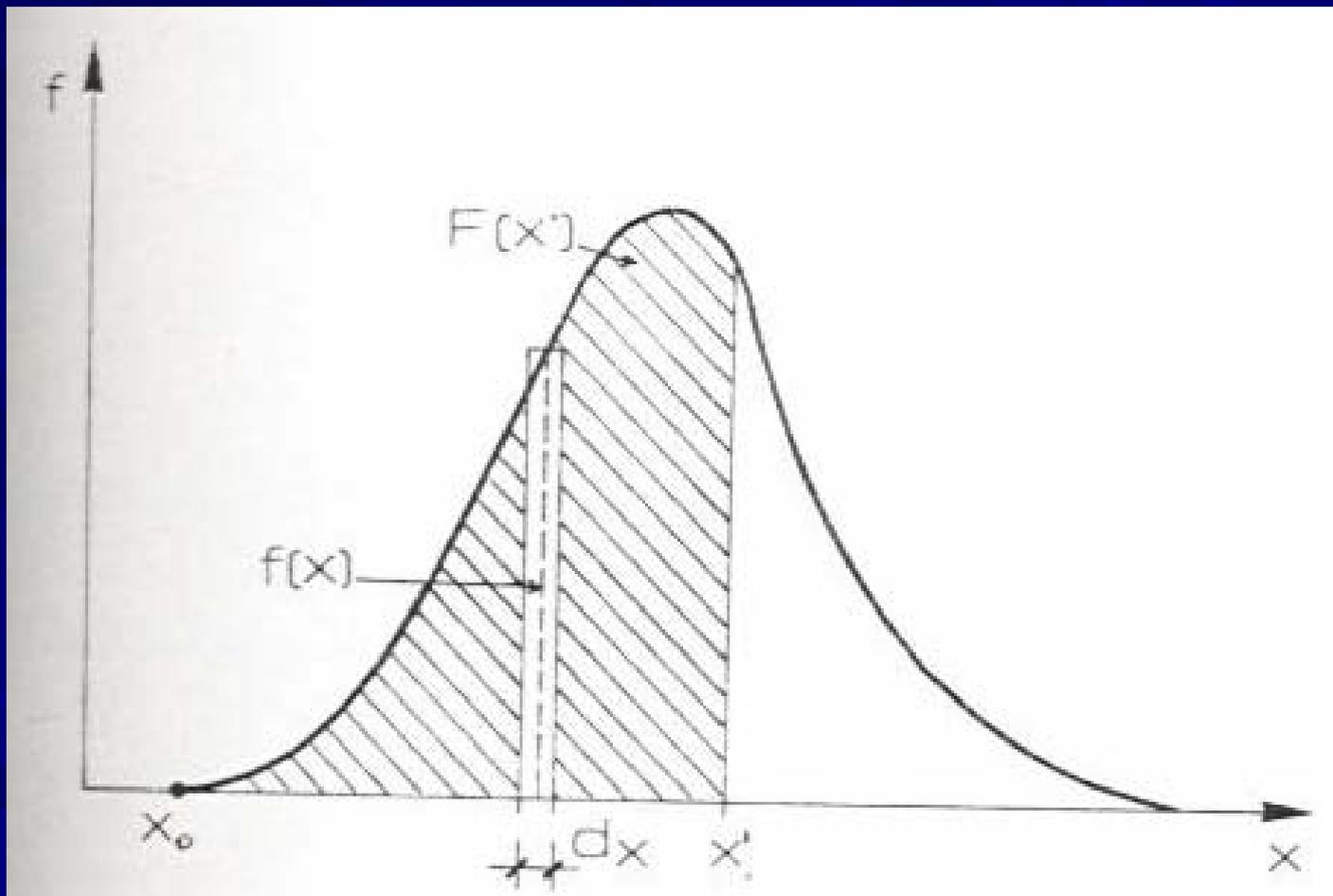
- Le caratteristiche dei materiali rappresentano il secondo fattore fondamentale della sicurezza. Anche la resistenza dei materiali da costruzione non è esprimibile in forma deterministica in quanto essa è fortemente variabile pur in presenza di caratteristiche di produzione omogenee.
- Questo vale sia per l'acciaio da carpenteria o da c.a., sia, ed a maggior ragione, per il calcestruzzo nel quale si osserva una larga dispersione delle caratteristiche meccaniche in campioni nominalmente uguali ovvero caratterizzati dalla stessa composizione e dallo stesso procedimento di fabbricazione. Anche in questo caso come per le azioni di progetto, la definizione delle caratteristiche meccaniche dei materiali deve necessariamente derivare da una analisi probabilistica che tenga conto della dispersione delle caratteristiche meccaniche e definisca valori di riferimento con una prefissata probabilità.

Caratteristiche aleatorie della resistenza del calcestruzzo:

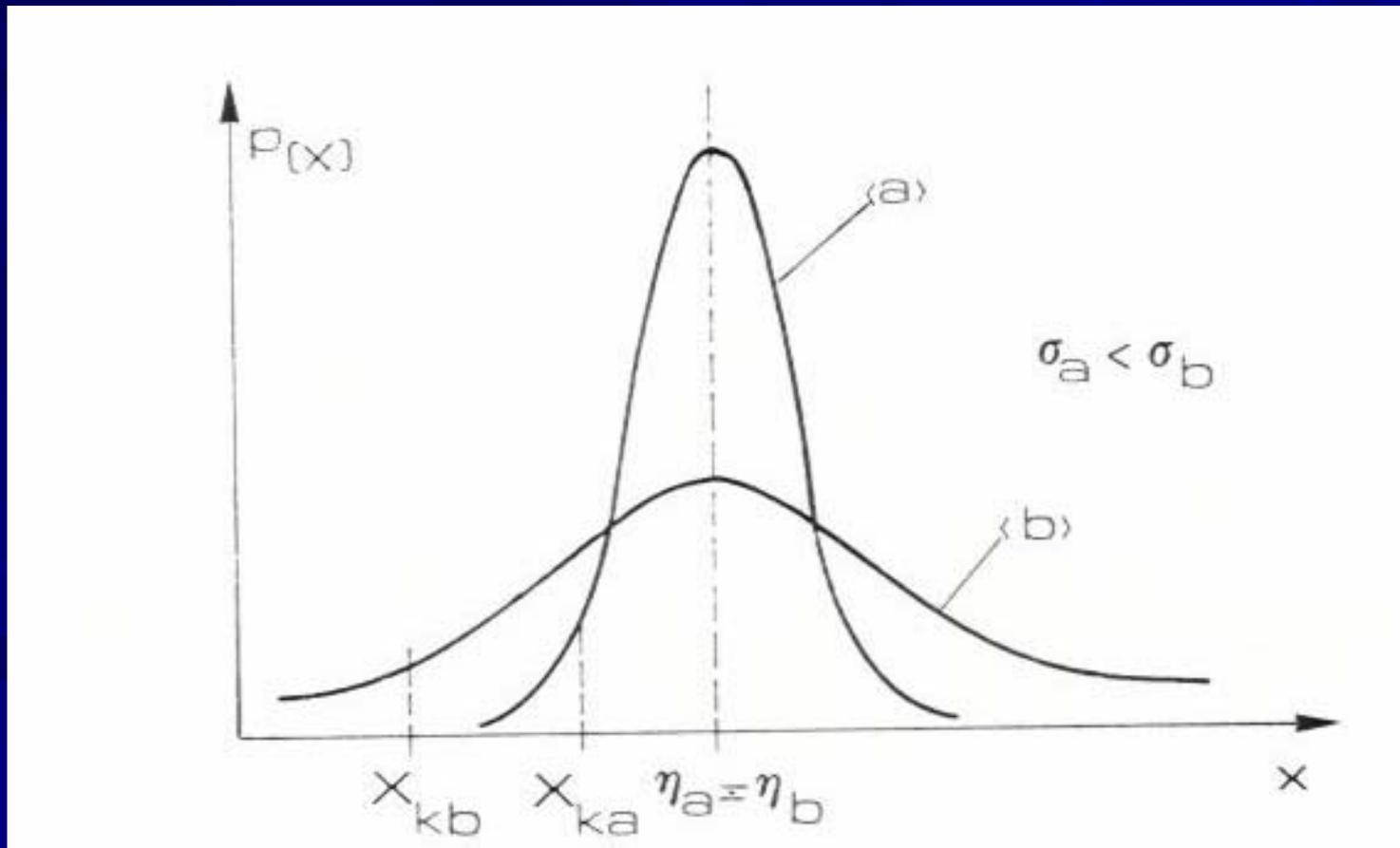
Istogramma della resistenza



Al crescere dei campioni l'istogramma diventa curva di frequenza o di probabilità



Curve di probabilità con diversa dispersione, valori caratteristici della resistenza



I metodi di controllo della sicurezza

- Allo stato attuale la misura della sicurezza strutturale può essere effettuata sulla base di tre diverse metodologie:
 - il metodo elastico o delle tensioni ammissibili;
 - il metodo del calcolo a rottura;
 - L'approccio probabilistico, che dal punto di vista operativo si traduce in genere nel metodo semi-probabilistico agli stati limite.

Il metodo delle tensioni ammissibili

- Nel metodo delle tensioni ammissibili si ammettono le ipotesi proprie del calcolo elastico lineare, come piccoli spostamenti, piccole deformazioni, vincoli lisci e bilaterali, cui segue il principio di sovrapposizione degli effetti.
- Si applica, pertanto, un calcolo delle sollecitazioni sostanzialmente elastico-lineare sulla base di opportuni modelli strutturali e con riferimento ai valori “caratteristici” delle azioni, corrispondenti ad una probabilità di essere superate del 5%.
- La verifica di sicurezza consiste nel garantire che in nessun punto della struttura siano prodotte deformazioni permanenti, assumendo peraltro un conveniente margine nei confronti di questa evenienza. Dal punto di vista operativo ciò si traduce nel controllare che in nessun punto vengano superati i limiti delle “*tensioni ammissibili*”, fissate per ogni materiale con riferimento alle resistenze caratteristiche degli stessi:

$$\sigma_{eq} \leq \left[\sigma = \frac{R_k}{\gamma} \right]$$

Il metodo delle tensioni ammissibili

- Nella relazione precedente σ_{eq} rappresenta la “*tensione equivalente*” nel punto, cioè quella tensione fittizia che in regime monoassiale di trazione o di compressione fornirebbe un moltiplicatore di crisi pari a quello relativo allo stato pluriassiale effettivo. La tensione equivalente si ricava dalla scrittura dei criteri di resistenza, che forniscono punto per punto la frontiera del dominio di elasticità, esprimibile mediante una equazione del tipo:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

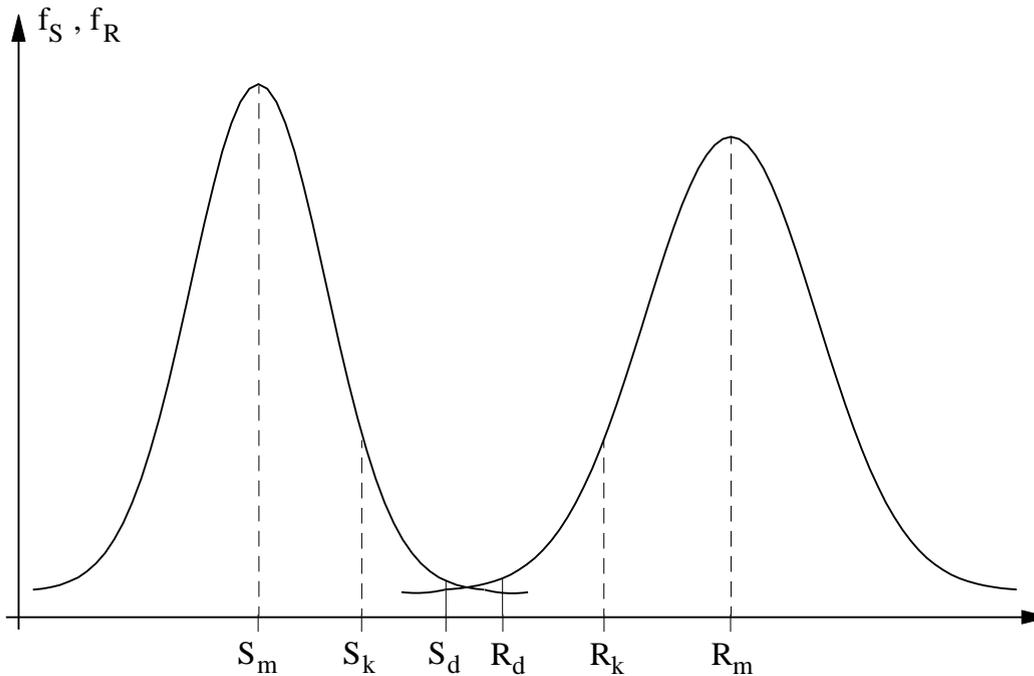
- Le tensioni ammissibili del generico materiale sono fissate a partire dalla resistenza caratteristica del materiale R_k ad un livello tale, definito dal coefficiente di sicurezza γ , da garantire che il comportamento dello stesso possa essere ritenuto elastico-lineare e che si determini un sufficiente margine di sicurezza rispetto al collasso per coprire le incertezze sulle azioni, sulla resistenza dei materiali, sulle imperfezioni esecutive, sul modello strutturale e sui metodi di valutazione delle sollecitazioni.

Valutazione critica

- Il metodo alle t.a. ha il pregio di una grande semplicità di uso, connessa al fatto che consente di operare nell'ambito delle ipotesi del principio di sovrapposizione degli effetti, ma d'altra parte presenta una serie di insufficienze che ne hanno determinato il superamento.
- Le ragioni principali di critica sono da riscontrarsi nei seguenti punti:
 - il metodo delle tensioni ammissibili **non garantisce una sicurezza strutturale omogenea**, in quanto, a parità di tensione, al variare di geometria ed armatura delle sezioni nel c.a., del tipo di sollecitazione (sforzo normale, flessione, pressoflessione, taglio, torsione), del tipo di struttura (isostatica o iperstatica), possono corrispondere coefficienti di sicurezza differenti;
 - **il metodo non consente di valutare correttamente l'influenza delle distorsioni** (ritiro, viscosità, variazioni termiche) e di altri comportamenti non lineari (plasticizzazioni locali, fessurazione), in quanto eventuali deformazioni non lineari connesse a tali cause non necessariamente determinano una riduzione della sicurezza nei confronti delle azioni rimanenti (carichi permanenti e variabili, vento, sisma);
 - il metodo, prevedendo la somma di tutte le azioni al loro livello caratteristico (frattile superiore al 95%) **non consente di differenziare la diversa probabilità delle combinazioni di carico e la loro diversa incidenza sulla sicurezza e sulla accettabilità delle generica struttura**: ad esempio è poco probabile che l'azione caratteristica (al 95%) di una azione variabile ed eccezionale come il vento si cumuli con il valore caratteristico di altri carichi variabili.

METODO SEMIPROBABILISTICO AGLI STATI LIMITE

- *Definizione delle sollecitazioni e delle resistenze di progetto*



D
e
f
i
n
i
t
i
i
n
f
a
t
t
i

$$S_d \leq R_d$$

$$\gamma_S \cdot S_k \leq \frac{R_k}{\gamma_R}$$

Metodi di analisi delle strutture ed elementi di analisi limite

- Nella verifica delle strutture agli stati limite, dovendosi considerare il comportamento non lineare dei materiali e delle strutture, sono necessarie metodologie generalmente diverse da quelle lineari per l'analisi delle strutture e per la verifica delle sezioni.
- In particolare nelle strutture iperstatiche il calcolo delle sollecitazioni allo stato limite ultimo nelle sezioni può essere eseguito seguendo diverse strade che in diverso modo tengono conto del comportamento non lineare delle membrature in prossimità dello stato limite.
- Si considerano a livello normativo quattro diversi modi di analisi delle strutture, fissando per ciascuno criteri e limiti di applicazione:
 - A) calcolo elastico lineare senza redistribuzione delle sollecitazioni;
 - B) calcolo elastico lineare con redistribuzione delle sollecitazioni;
 - C) calcolo plastico;
 - D) calcolo non lineare.

A) Calcolo elastico-lineare senza redistribuzione delle sollecitazioni

- Il primo metodo di analisi delle sollecitazioni non differisce da quello normalmente usato nell'ambito del tradizionale metodo di verifica della sicurezza alle tensioni ammissibili. Trova giustificazione nel fatto che dimensionando le membrature in modo tale che le caratteristiche della sollecitazione resistenti nelle sezioni siano maggiori di quelle sollecitanti, per le condizioni di carico previste, con un calcolo elastico allo s.l.u., la deviazione dal comportamento lineare delle sezioni è relativamente contenuta e quindi non condiziona in maniera significativa il risultato delle verifiche.
- Infatti la deviazione dal comportamento lineare, che a stretto rigore influenza le caratteristiche della sollecitazione nelle strutture iperstatiche fin dalle prime fessurazioni, è rilevante quando le armature superano lo snervamento ovvero il calcestruzzo è sollecitato oltre il 60% della resistenza caratteristica.
- L'approssimazione implicitamente ammessa non è qualitativamente diversa da quella normalmente accettata nelle verifiche alle tensioni ammissibili in cui si ammette un comportamento lineare elastico delle membrature in c.a. trascurando gli effetti sulla rigidità della fessurazione del

B) Calcolo elastico-lineare con ridistribuzione delle sollecitazioni

- Il secondo metodo di verifica assume come punto di partenza per l'analisi delle sollecitazioni un calcolo elastico lineare ma consente la ridistribuzione dei momenti.
- Da un punto di vista operativo, una volta determinata con i consueti metodi elastici lineari la distribuzione delle sollecitazioni, si correggono i valori delle sollecitazioni M_e in alcune sezioni critiche, generalmente nelle sezioni di momento negativo, mediante un coefficiente riduttivo δ [<1]:

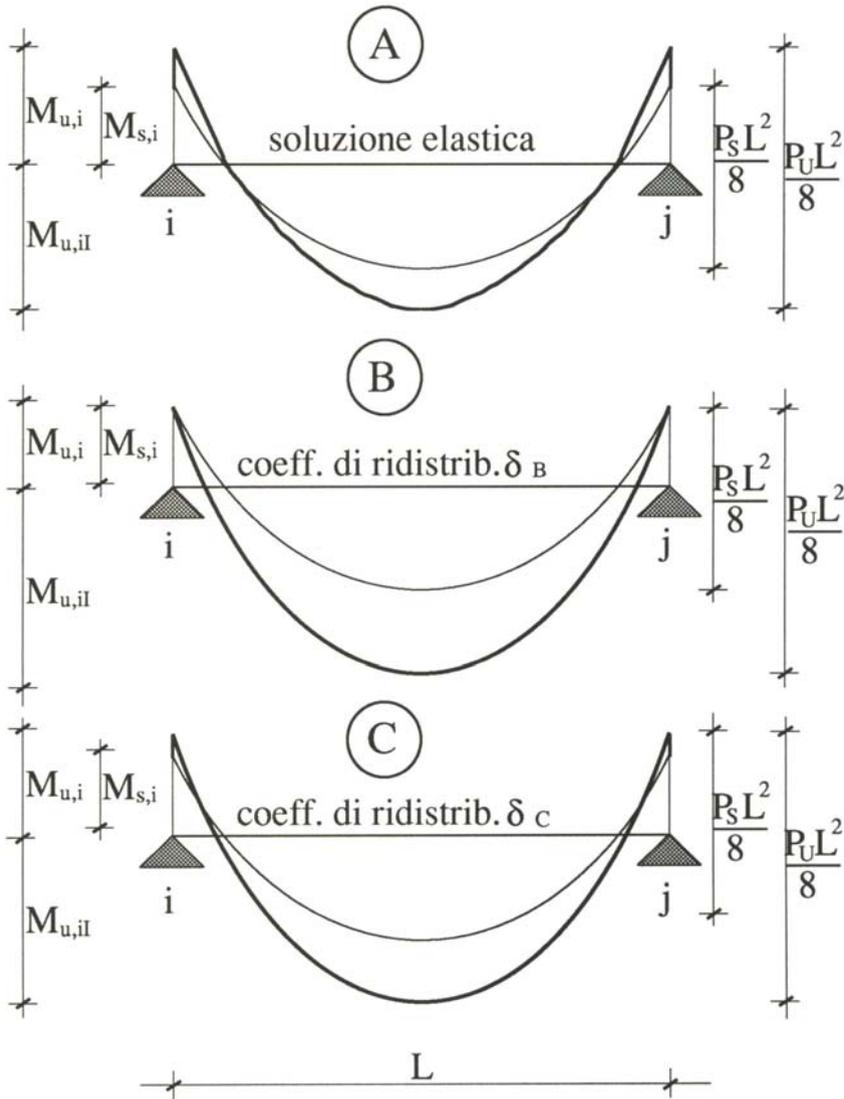
$$M_r = \delta \cdot M_e$$

- I momenti in campata nelle aste della struttura in cui sono stati variati i momenti nodali vanno poi corretti per il rispetto dell'equilibrio.
- Tale metodo è applicabile a travi continue o a telai a nodi fissi in cui cioè le forze orizzontali sono assenti o affidate ad altre strutture. Il coefficiente riduttivo δ è legato alla duttilità delle sezioni critiche in cui si opera la ridistribuzione e, poiché la duttilità delle sezioni critiche decresce al crescere dell'asse neutro adimensionale (y_c/d), il coefficiente di ridistribuzione δ viene limitato, secondo la normativa italiana, dalle seguenti condizioni:

$$\delta \geq 0.44 + 1.25 \cdot \frac{y_c}{d}$$

$$0.75 \leq \delta \leq 1$$

- La relazione precedente consente il massimo di ridistribuzione ($\delta=0.75$) quando è massima la duttilità delle sezioni critiche ($y_c \leq 0.25d$); non consente ridistribuzione dei momenti quando le sezioni critiche hanno un asse neutro maggiore di $0.45d$.



$$\delta_B = \frac{M_{u,i}(B)}{M_{u,i}(A)}$$

$$\delta_C = \frac{M_{u,i}(C)}{M_{u,i}(A)}$$

Ridistribuzione dei momenti

Considerazioni sul metodo

- In sintesi il metodo sopra descritto si presenta come l'applicazione del metodo statico alle strutture in c.a.; infatti nel progetto delle membrature si adotta un **campo di sollecitazioni staticamente ammissibili** (ovvero equilibrate con i carichi esterni e che non violano le condizioni di plasticizzazione in quanto tali sollecitazioni sono assunte come sollecitazioni di progetto), con alcune limitazioni finalizzate a commisurare la capacità rotazionale richiesta con quella disponibile.
- A tale scopo si limita il coefficiente di redistribuzione in un campo di variazione relativamente poco diverso dall'unità ($0.75 \leq \delta \leq 1$) imponendo in tal modo che la distribuzione dei momenti di progetto sia non troppo diversa da quella fornita da un calcolo elastico; inoltre si correla il coefficiente di redistribuzione alla capacità rotazionale disponibile attraverso y_c/d .

C) Calcolo plastico

- Il calcolo plastico, consentito dall'EC2 per le travi continue con luci poco variabili, può applicarsi come il metodo precedente correggendo i momenti derivati da un calcolo elastico senza le limitazioni su δ .
- Occorre però controllare che le sezioni critiche siano effettivamente duttili, verificando che risulti:

$$y_c \leq 0.25 d$$

- E' il caso di sottolineare che dal momento che le verifiche allo s.l.u. possono prescindere dalla distribuzione elastica delle sollecitazioni, diventano importanti e fortemente limitative le verifiche tensionali in condizioni di servizio.
- Infatti per i carichi di servizio le tensioni di lavoro potrebbero essere troppo elevate o anche superare i limiti elastici. A tale riguardo la normativa richiede verifiche tensionali di servizio.
- L'EC2, ad esempio, impone limiti tensionali in condizioni di servizio:
- - *per le condizioni di carico semipermanenti*

$$\sigma_{c,\text{lim}} = 0.45 f_{ck} \quad [= 0.45 \cdot 0.83 \cdot R_{ck}]$$

$$\sigma_{s,\text{lim}} \leq 0.80 f_{yk}$$

- - *per le condizioni di carico frequenti e rare*

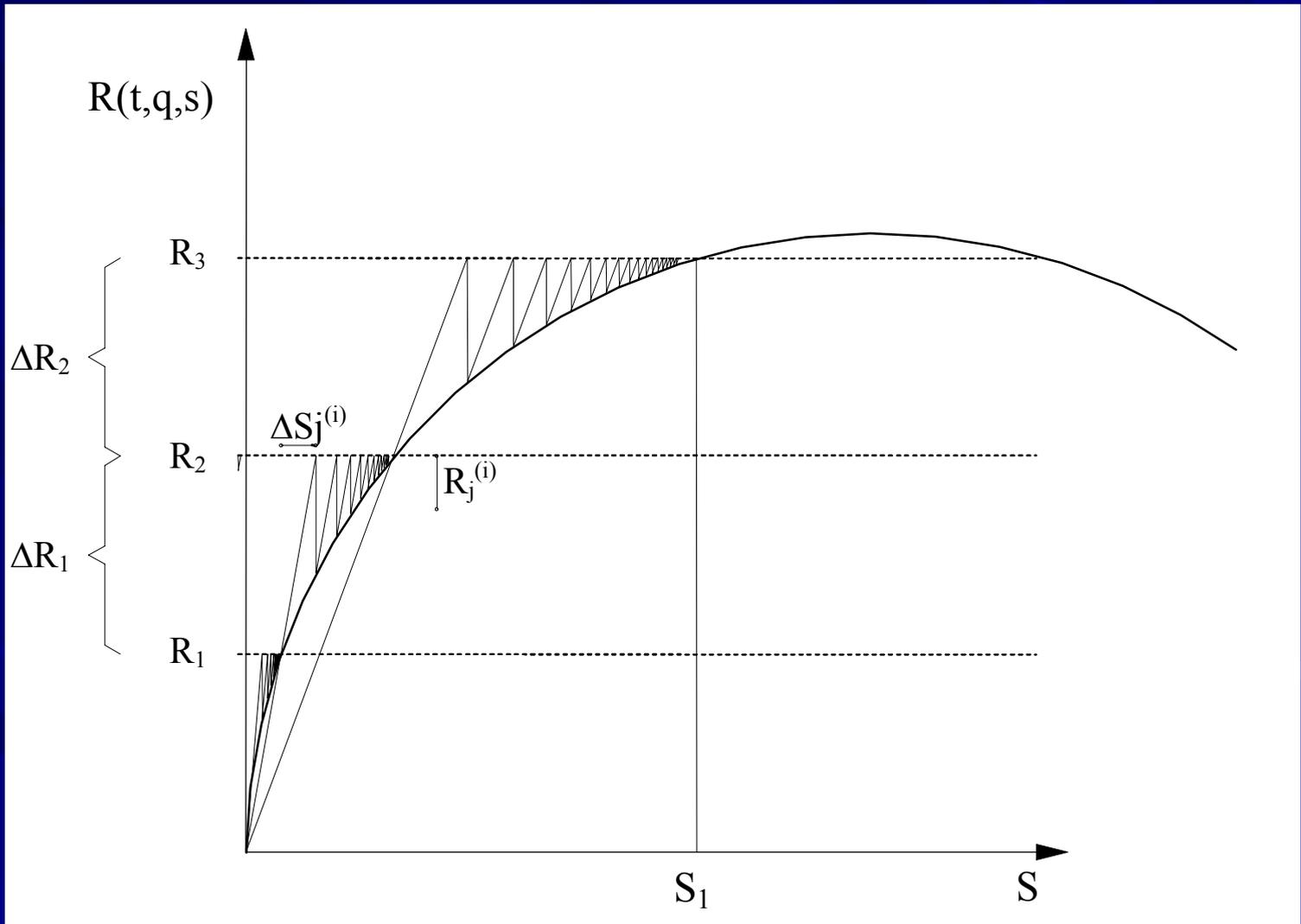
$$\sigma_{c,\text{lim}} \leq 0.60 f_{ck} \quad [= 0.60 \cdot 0.83 \cdot R_{ck}]$$

$$\sigma_{s,\text{lim}} \leq 0.80 f_{yk}$$

D) Calcolo non lineare

- Il calcolo non lineare si basa sulla utilizzazione di legami momento-curvatura delle sezioni o momento-rotazione nelle sezioni critiche non lineari per effetto della fessurazione e del comportamento non lineare dei materiali.
- L'utilizzazione di tali legami può essere consentita da procedimenti iterativi al passo, basati sul fatto che ad ogni passo di carico le rigidezze delle membrature mutano per effetto del comportamento non lineare ed è quindi necessario modificare progressivamente la matrice di rigidezza della struttura (secante o tangente) fino al raggiungimento del collasso nella sezione critica per il raggiungimento di un limite di deformazione.

Analisi non lineare



Definizione degli stati limite

Gli **stati limite di servizio**, possono derivare da prescrizioni legate alle prestazioni che si richiedono nel caso specifico e sono principalmente derivati da:

- eccessiva fessurazione;
- eccessiva deformazione;
- eccessiva corrosione o degradazione;
- eccessiva vibrazione.

Tali stati limite, pur non riguardando direttamente la sicurezza, condizionano la funzionalità della costruzione, la sua durabilità, i suoi costi di manutenzione e, quindi, l'accettabilità della costruzione stessa.

Gli **stati limite ultimi** possono derivare invece da:

- perdita di equilibrio di una parte o dell'insieme della struttura, considerata come un corpo rigido;
- rottura localizzata della struttura per azioni statiche;
- collasso per trasformazione della struttura o di una sua parte in un meccanismo;
- instabilità per deformazione;
- rottura localizzata della struttura per fatica;
- deformazioni plastiche o di fluage, fessurazioni o scorrimenti di giunti che conducano ad una modifica della geometria, tale da rendere necessaria la sostituzione della struttura o di sue parti fond.;
- degradazione o corrosione, che rendano necessaria la sostituzione

Combinazioni di carico allo stato limite ultimo

- Il *metodo di verifica semiprobabilistico agli stati limite* evidenzia nella sua stessa definizione l'attenzione al fatto che il comportamento delle strutture dipende da grandezze aleatorie, che riguardano sia la resistenza dei materiali, sia l'intensità ed il tipo di permanenza delle azioni (carichi di breve o lunga durata, carichi ripetuti), sia la geometria della struttura con le imperfezioni conseguenti, sia l'adeguatezza dei modelli di calcolo adottati.
- Tale considerazione ha come immediata conseguenza che le verifiche delle strutture andrebbero condotte correttamente solo con *metodi probabilistici*, controllando che la probabilità del manifestarsi di una deficienza strutturale, che consiste nel superamento di un determinato stato limite, si mantenga sufficientemente bassa. Un approccio di questo tipo richiede un impegno calcolativo generalmente troppo elevato ed avrebbe senso solo se le grandezze aleatorie fossero conosciute tutte con grande accuratezza; pertanto i metodi di verifica proposti dalle normative, *metodi semiprobabilistici*, si accontentano di valutare separatamente lo stato di sollecitazione da una parte e la resistenza della struttura dall'altra per assegnati livelli di probabilità, controllando che le sollecitazioni così determinate si mantengano sufficientemente al di sotto delle resistenze corrispondenti.

Aspetti basilari del metodo

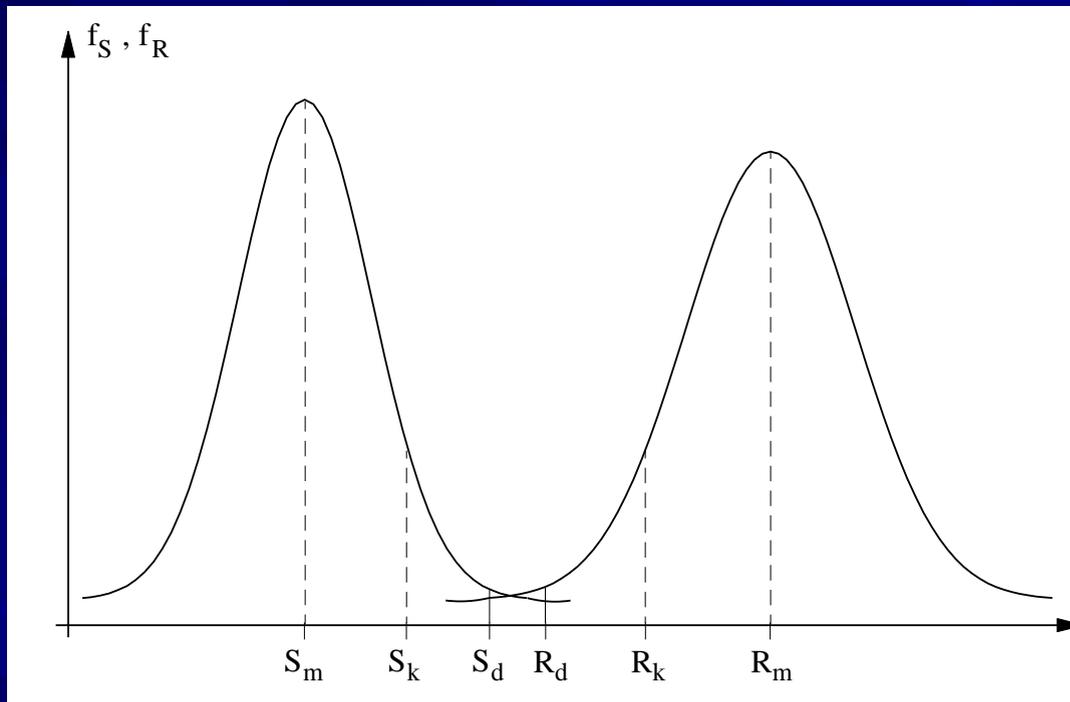
<semiprobabilistico agli stati limite>

- l'adozione di valori caratteristici per tutte le grandezze di cui si voglia considerare il carattere aleatorio, come **le resistenze dei materiali e l'intensità delle azioni**;
- per le resistenze si definiscono i valori caratteristici come i frattili di ordine 0.05 delle rispettive distribuzioni statistiche; per le azioni si definiscono come valori caratteristici frattili di ordine 0.95, quando ai fini della sicurezza sono rilevanti i valori maggiori delle stesse, ovvero i frattili di ordine 0.05 nel caso contrario;
- la trasformazione dei valori caratteristici innanzi descritti in valori di calcolo adeguati allo stato limite considerato mediante l'applicazione di coefficienti γ_m e γ_f con lo scopo di coprire le incertezze non considerate nelle curve di distribuzione dei materiali e delle azioni e di adeguare il livello di probabilità delle resistenze e delle sollecitazioni a valori compatibili con la sicurezza richiesta per i vari tipi di verifica;
- in particolare le resistenze di calcolo si ottengono dividendo le resistenze caratteristiche per γ_m , le azioni di calcolo moltiplicando quelle caratteristiche per i coefficienti γ_f ;
- il controllo che i valori effettivi delle caratteristiche di resistenza di calcolo (resistenze di sezioni, di membrature, deformazioni limite) non siano superati dalle caratteristiche di sollecitazione di calcolo (sollecitazioni dovute alle azioni di calcolo, deformazioni).

I coefficienti parziali di sicurezza

- I coefficienti γ_m per la determinazione delle resistenze di calcolo del calcestruzzo e dell'acciaio per c.a. e c.a.p. secondo la normativa nazionale (D.M. 09/01/1996), valgono:
 - calcestruzzo: $\gamma_m = 1.60$
 - acciaio da c.a. e c.a.p.: $\gamma_m = 1.15$
- I coefficienti γ_f amplificativi delle azioni per ottenere i valori di calcolo delle stesse, valgono invece con riferimento ai diversi tipi di azioni:
 - azioni permanenti G_k $\gamma_g = 1.4$ (1.0 se il suo contributo aumenta la sicurezza)
 - azioni da precompressione P_k $\gamma_p = 0.85$ (1.2 se il suo contributo diminuisce la sicurezza)
 - azioni variabili Q_{ik} $\gamma_q = 1.5$ (0 se il suo contributo aumenta la sicurezza)
- Per la definizione delle combinazioni di carico allo stato limite ultimo vengono altresì definiti i coefficienti di combinazione $\psi_{0i} < 1$, che servono a determinare il valore di combinazione di una azione variabile da adottare in presenza di altra azione variabile assunta con il suo valore di progetto.

Definiti infatti i valori caratteristici S_k e di calcolo S_d delle sollecitazioni ed i valori caratteristici R_k e di calcolo R_d delle resistenze delle sezioni, tale controllo si riconduce alla verifica della disequaglianza: $S_d \leq R_d$ il cui significato è facilmente desumibile dalla figura.



■ *Definizione delle sollecitazioni e delle resistenze di progetto*

Combinazioni di carico allo s.l.u.

- Nelle verifiche allo s.l.u. le combinazioni di carico si possono esprimere nel modo seguente:

$$F_d = \gamma_g G_k + \gamma_p P_k + \gamma_q \cdot \left[Q_{1k} + \sum_{i=2}^n (\psi_{oi} Q_{ik}) \right]$$

- Tale relazione esprime in forma simbolica che le condizioni di carico allo s.l.u., devono prevedere i carichi amplificati ($\gamma \cdot G_k$), le azioni della precompressione amplificate o ridotte a seconda della condizione più sfavorevole ($\gamma_p \cdot P_k$), i carichi variabili amplificati ($\gamma_q \cdot Q_k$). In presenza di più carichi variabili il primo viene considerato per intero, i rimanenti vengono corretti dai coefficienti di combinazione (ψ_{oi}).
- Il ruolo dei coefficienti γ e ψ è di determinare combinazioni di carico di una prefissata probabilità, differenziando le verifiche agli s.l.u. da quelle agli s.l.s., in cui diverse sono le probabilità di riferimento. In particolare le combinazioni di carico per le verifiche agli s.l.u. hanno una probabilità di accadimento molto inferiore a quella di riferimento per le verifiche di servizio.

Combinazioni di carico allo s.l.s.

- Le azioni da considerare per tali verifiche sono quelle normalmente presenti nella vita della struttura; possono al riguardo distinguersi le azioni quasi permanenti, costituite dal peso proprio, dai carichi fissi e da una quota modesta dei carichi accidentali, e le azioni frequenti costituite dal peso proprio, dai carichi fissi e da una quota maggiore di carichi variabili. In particolare, carichi come il vento e la neve non sono in genere da considerarsi nelle condizioni di carico quasi-permanenti, mentre possono considerarsi nelle condizioni di carico frequenti con percentuali ridotte (dell'ordine del 20%).
- Le azioni negli s.l.s. sono assunte con i loro valori caratteristici ($\gamma_g = \gamma_p = \gamma_q = 1$), in rapporto al diverso tipo di permanenza delle azioni, che determina un diverso effetto sulla struttura, come ad esempio la corrosione e gli effetti viscosi; si ottengono diversi tipi di combinazioni di carico:
- combinazioni rare, combinazioni frequenti, combinazioni quasi permanenti:

$$= G_k + P_k + Q_{1k} + \sum_{i=2}^n (\psi_{1i} Q_{ik})$$

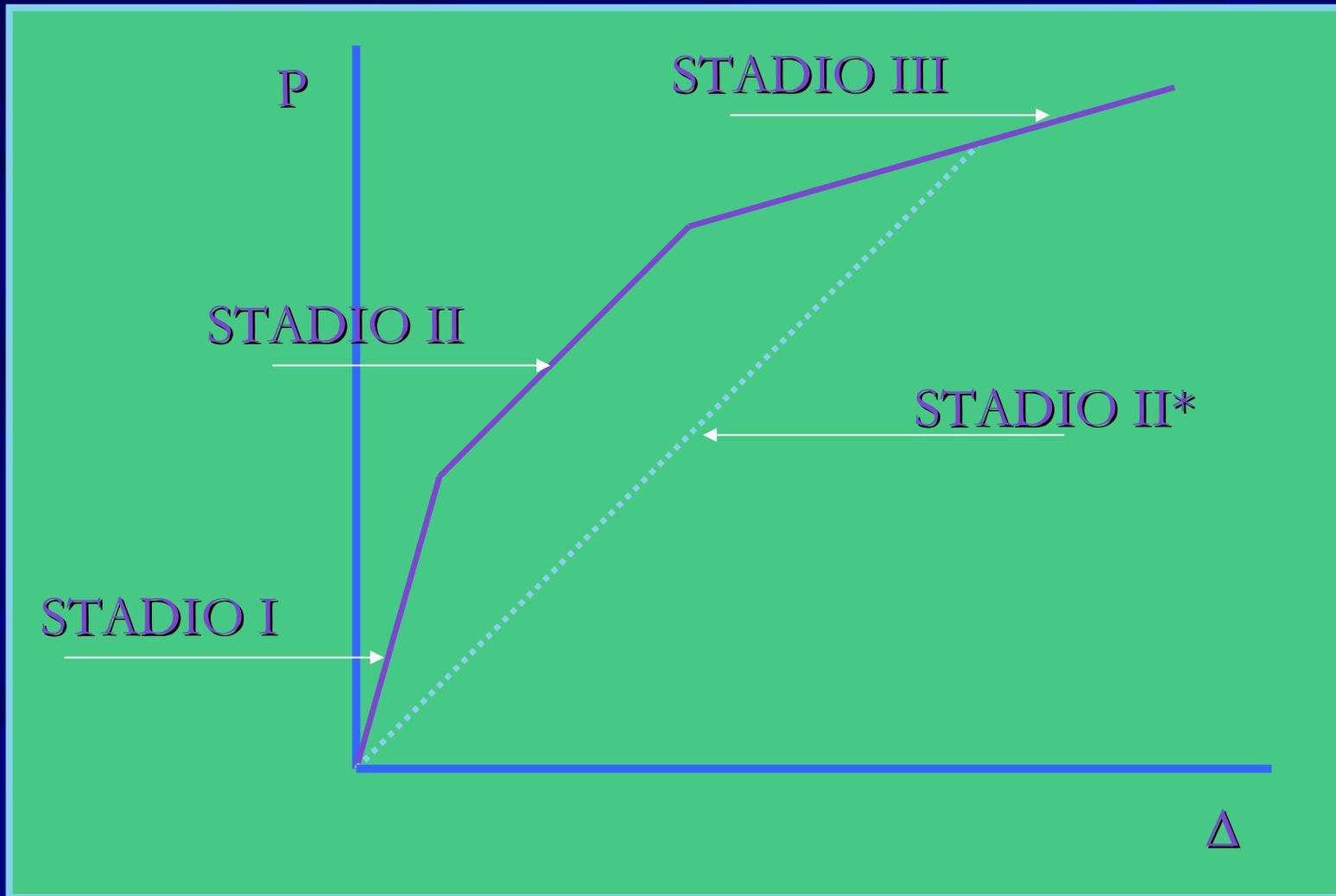
$$F_d = G_k + P_k + \psi_1 Q_{1k} + \sum_{i=2}^n (\psi_{2i} Q_{ik})$$

$$F_d = G_k + P_k + \sum_{i=1}^n (\psi_{2i} Q_{ik})$$

- ψ_1 = coefficiente atto a definire i valori delle azioni corrispondenti a frattili di ordine 0.95 delle distribuzioni dei valori istantanei;
- ψ_2 = coefficiente atto a definire i valori quasi permanenti delle azioni corrispondenti a valori medi delle distribuzioni dei valori istantanei.

- Lo stato limite ultimo più frequente nelle strutture in c.a. è lo stato limite per tensioni normali ovvero lo stato limite di sezioni presso/tenso-inflesse. Tale stato limite riguarda pertanto in maniera unitaria i casi di flessione, pressoflessione e tensoflessione.
- Dal punto di vista del comportamento, le sezioni sottoposte a sollecitazioni di presso-tensoflessione con flessione prevalente, attraversano tre diverse fasi al crescere della entità delle sollecitazioni:

la prima fase è caratterizzata dalla assenza di fessure e quindi da un comportamento a sezione integra o non parzializzata;
la seconda fase è caratterizzata dalla fessurazione delle sezioni e quindi dalla parzializzazione delle stesse mentre i materiali sono ancora elastici;
la terza fase, è caratterizzata dalla non linearità dei legami costitutivi essendo i materiali sollecitati a livelli tensionali prossimi alla rottura.

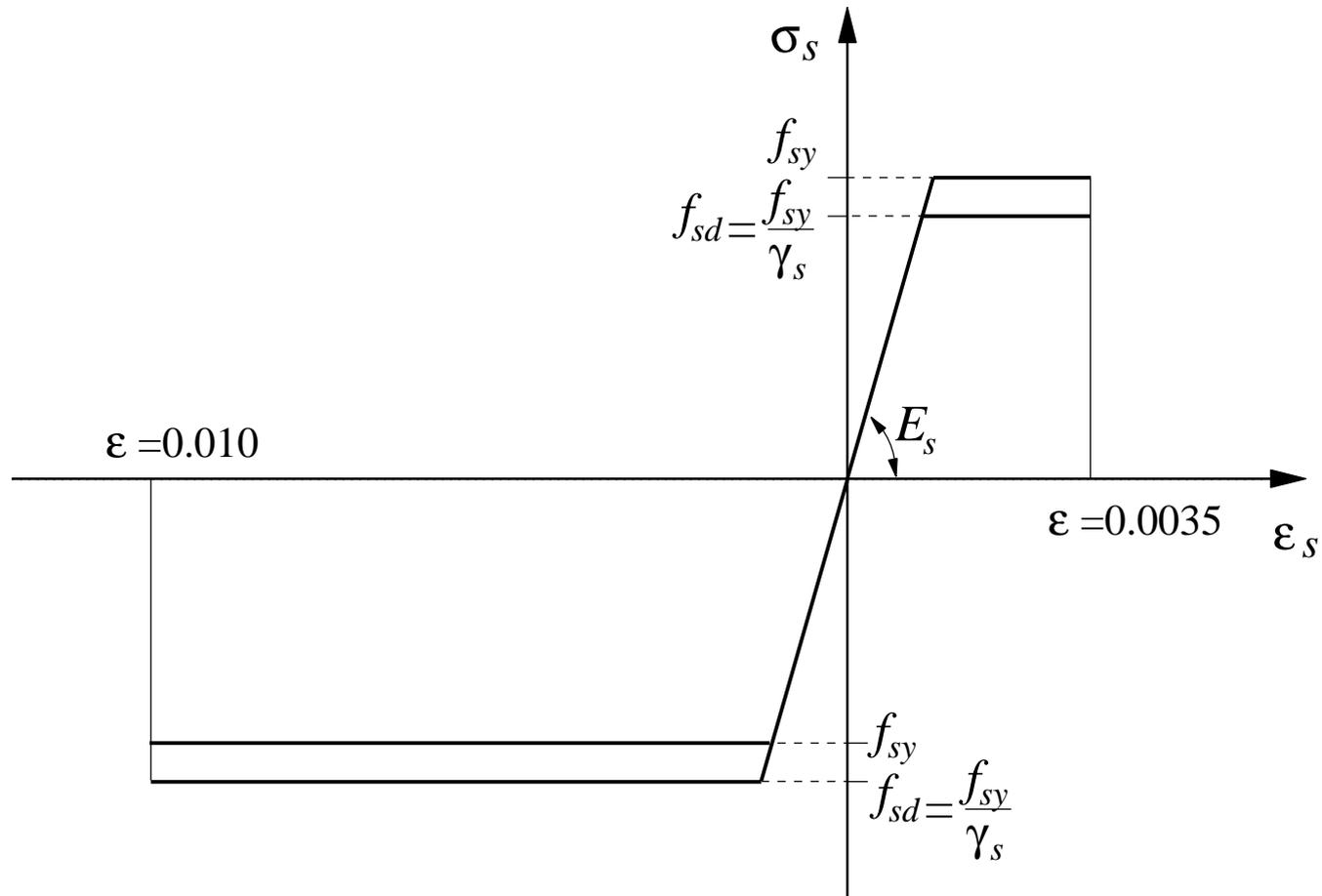


Ipotesi di base e legami costitutivi

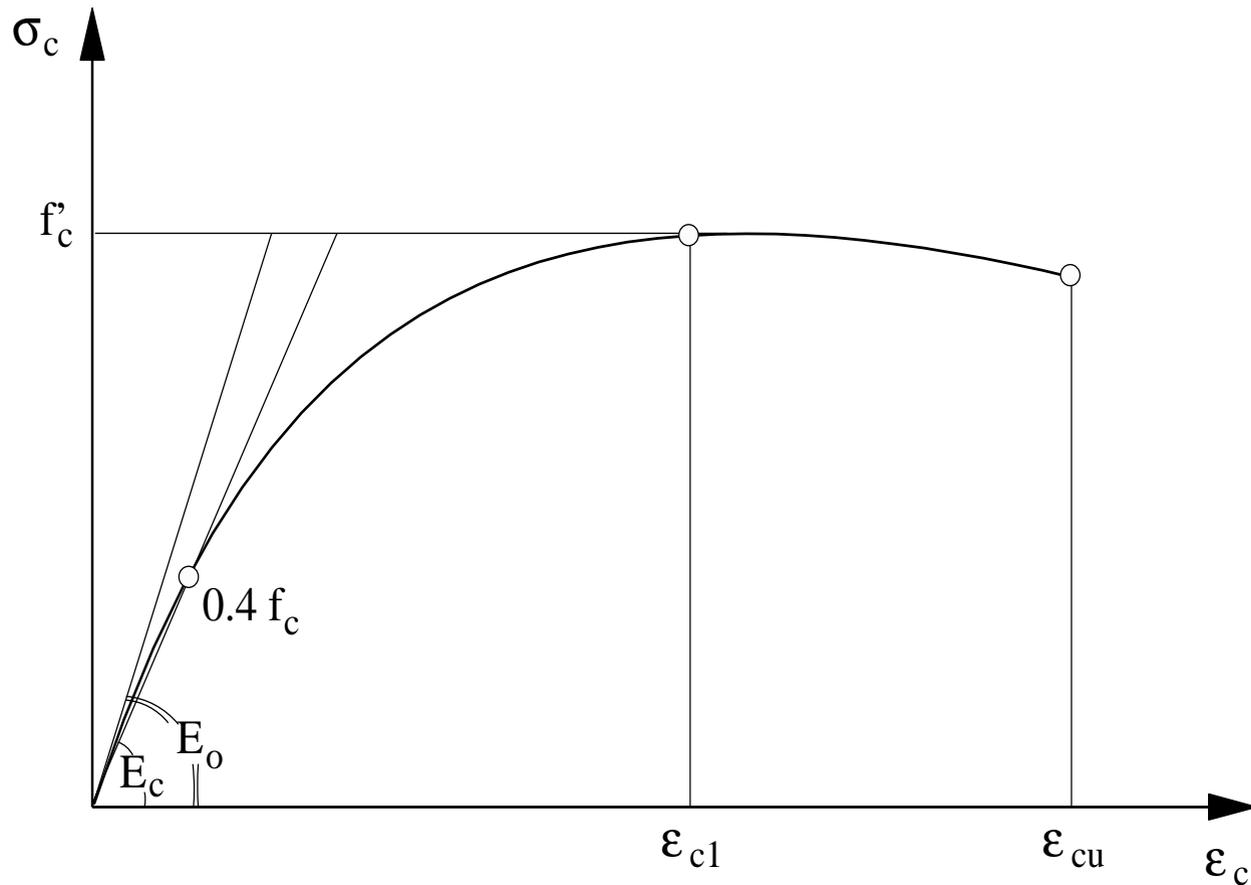
Per la determinazione delle caratteristiche ultime di sezioni in c.a. presso-tenso inflesse si assumono le consuete ipotesi alla base della teoria tecnica:

- conservazione delle sezioni piane;
- omogeneità ed isotropia del calcestruzzo in zona compressa e della armatura;
- aderenza tra calcestruzzo ed acciaio;
- trascurabilità della resistenza a trazione del calcestruzzo.

Legame costitutivo per l'armatura metallica



Legame costitutivo per il calcestruzzo



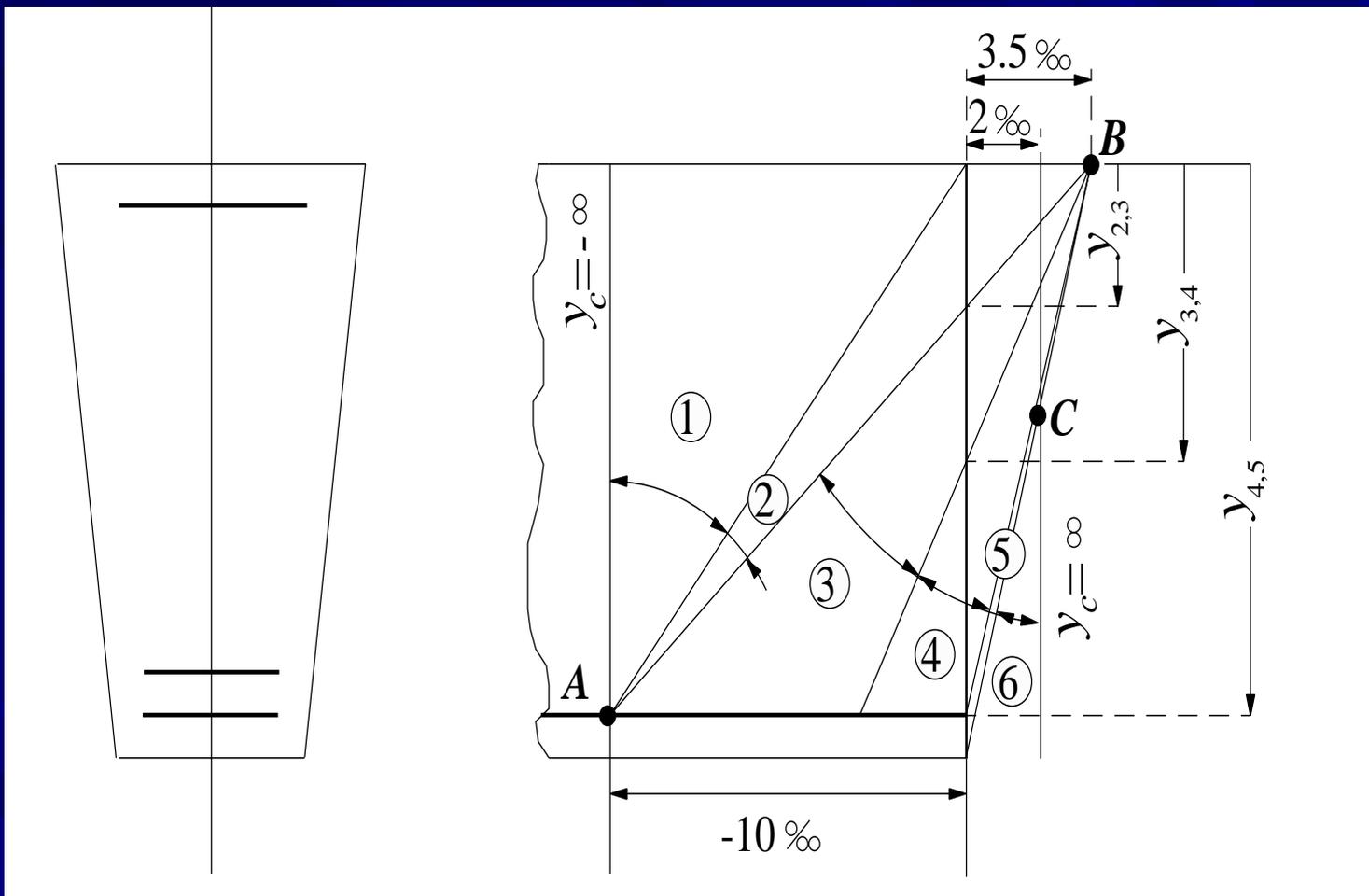
Definizione di s.l.u. per tensioni normali

- Lo stato limite ultimo di una sezione è individuato dal raggiungimento della massima deformazione del calcestruzzo compresso o dell'acciaio teso.
- I valori di tali deformazioni valgono rispettivamente:

$$\varepsilon_{cu} = 0.0035$$

$$\varepsilon_{su} = 0.010$$

Condizioni <limite> della sezione presso-tenso inflessa



STATI DI SOLLECITAZIONE IN RELAZIONE ALLA POSIZIONE DELL'ASSE NEUTRO

- ZONA 1 (tenso flessione o trazione pura)
- ZONA 2 (tenso-presso flessione/flessione)
- ZONA 3 (tenso-presso flessione/flessione)
- ZONA 4 (tenso-presso flessione/flessione)
- ZONA 5 (presso flessione)
- ZONA 6 (presso flessione/compr. sempl.)

Diagramma tensionale- deformativo allo s.l.u. con asse neutro esterno alla sezione

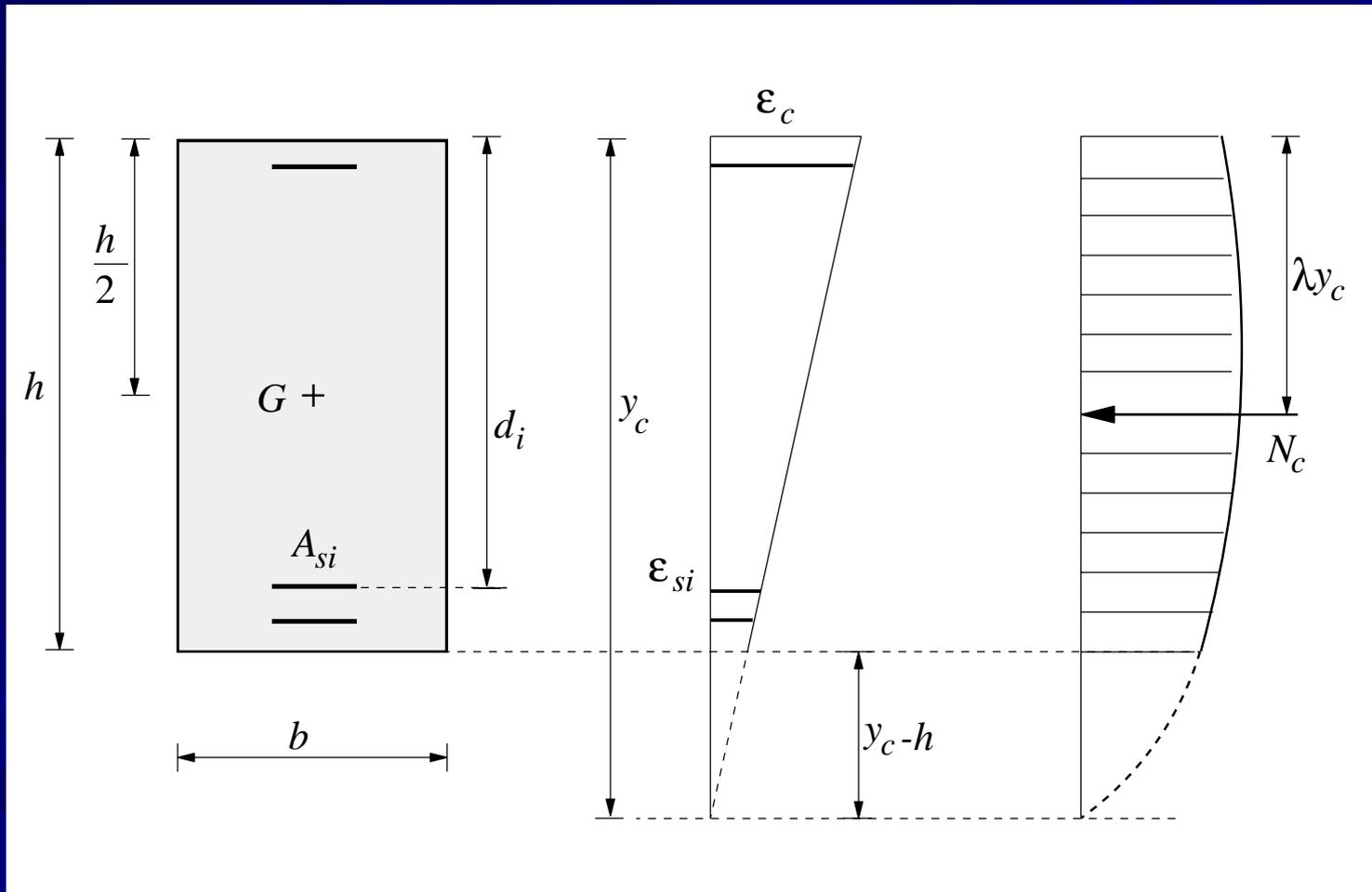
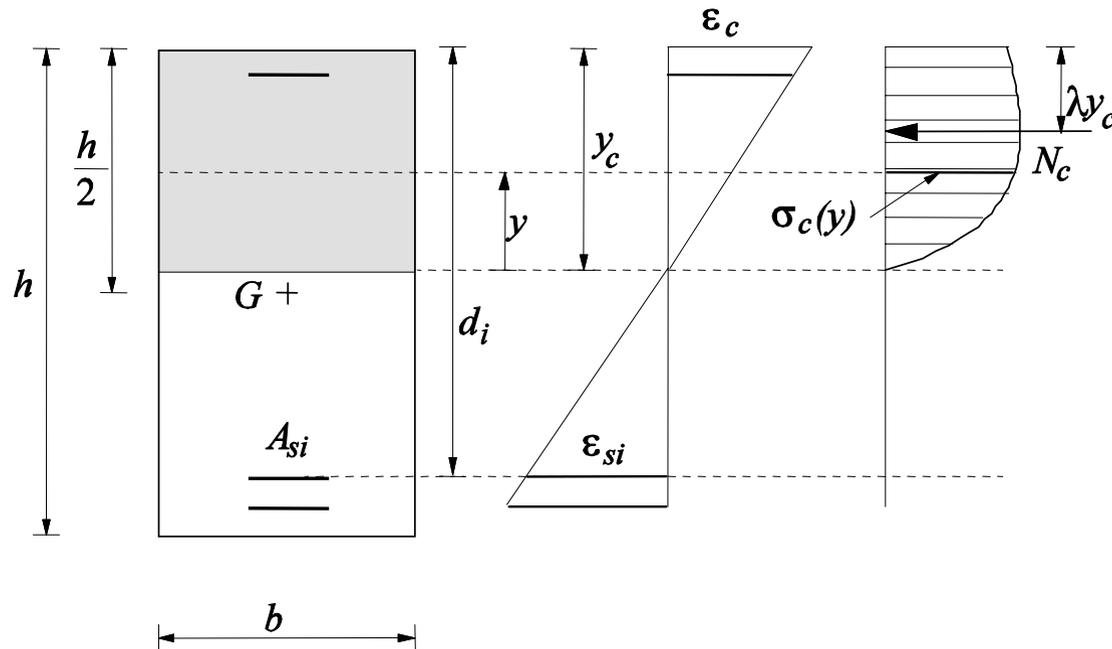


Diagramma tensionale-deformativo allo s.l.u. con asse neutro interno alla sezione



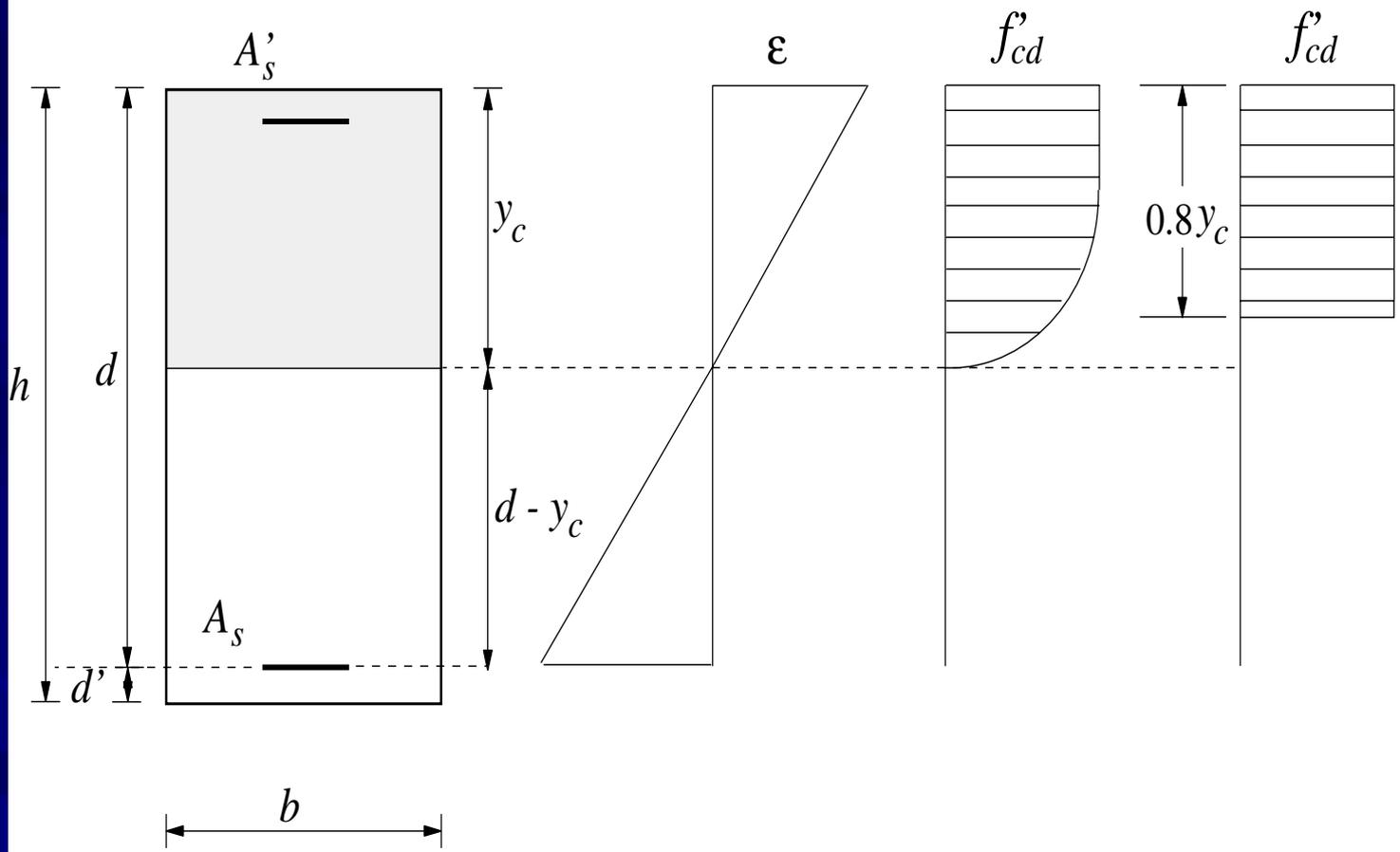
Equazioni di equilibrio interno della sezione

■ Equilibrio alla traslazione:

$$\int_{y_1}^{y_2} b \cdot \sigma(y) dy + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si} = N$$

■ Equilibrio alla rotazione:

$$\int_{y_1}^{y_2} b \cdot \sigma(y) \cdot \left[\frac{h}{2} - y_c + y \right] dy + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si} \cdot \left[\frac{h}{2} - d_i \right] = N \cdot e = M$$



ORDINE DEGLI INGEGNERI

Corso di aggiornamento sulla normativa sismica
gen. 2007 – mar. 2007

INTRODUZIONE AI METODI DI CONTROLLO DELLA SICUREZZA

FINE



Prof. Ciro FAELLA

Dipartimento di Ingegneria Civile

Università di Salerno

ORDINE DEGLI INGEGNERI

Corso di aggiornamento sulla normativa sismica

Gennaio 2007 – marzo 2007

STATO LIMITE ULTIMO PER TENSIONI NORMALI



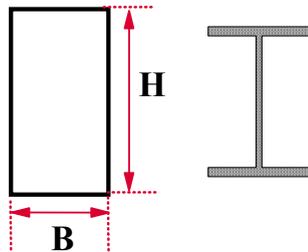
Prof. Ciro FAELLA

Dipartimento di Ingegneria Civile

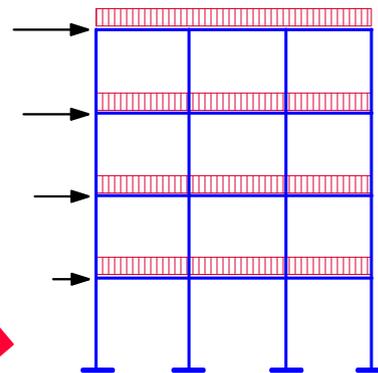
Università di Salerno

Analisi strutturale

**Idealizzazione struttura
e dimensionamento
elementi strutturali**

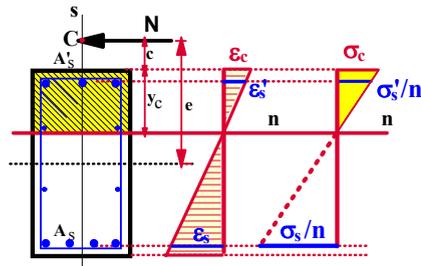


**Calcolo delle
sollecitazioni**



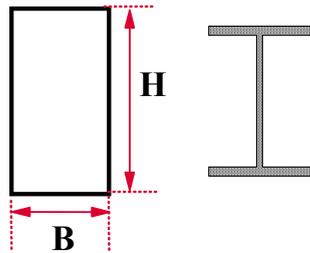
L'analisi è governata dal comportamento dei materiali

Verifica

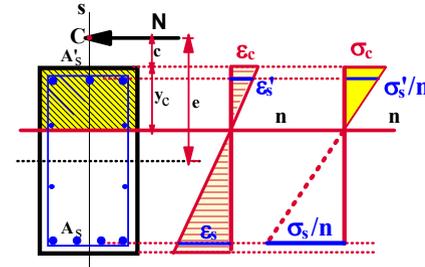


Analisi a livello di sezione

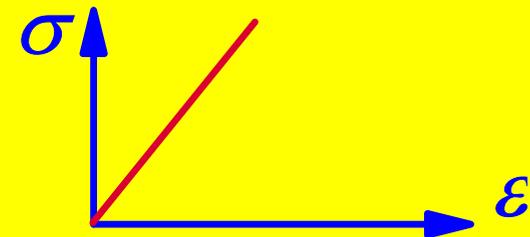
Dimensionamento elementi strutturali



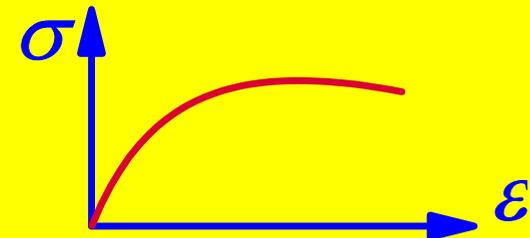
Verifica



A. Ipotesi di elasticità lineare dei materiali



B. Ipotesi di non linearità meccanica dei materiali



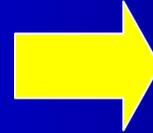
Ipotesi di base nel metodo delle tensioni ammissibili

- **Conservazione delle sezioni piane**
- **Omogeneità ed isotropia del calcestruzzo in zona compressa e dell'armatura**
- **Aderenza tra acciaio e calcestruzzo**
- **Trascurabilità della resistenza a trazione del calcestruzzo**

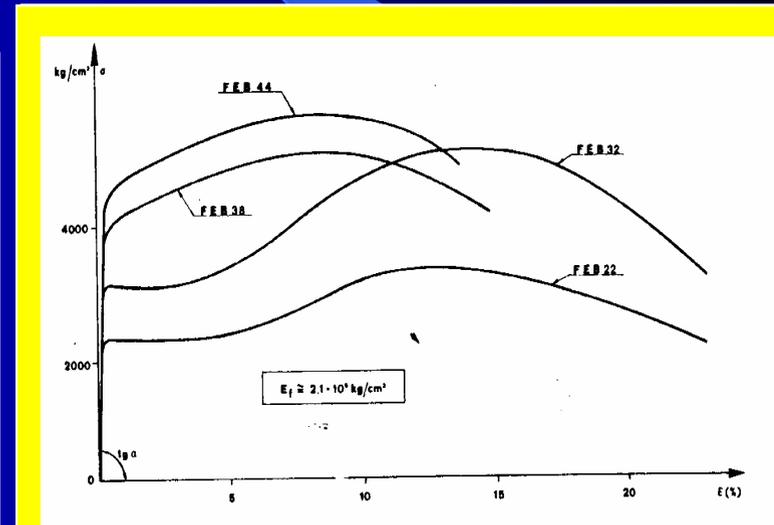
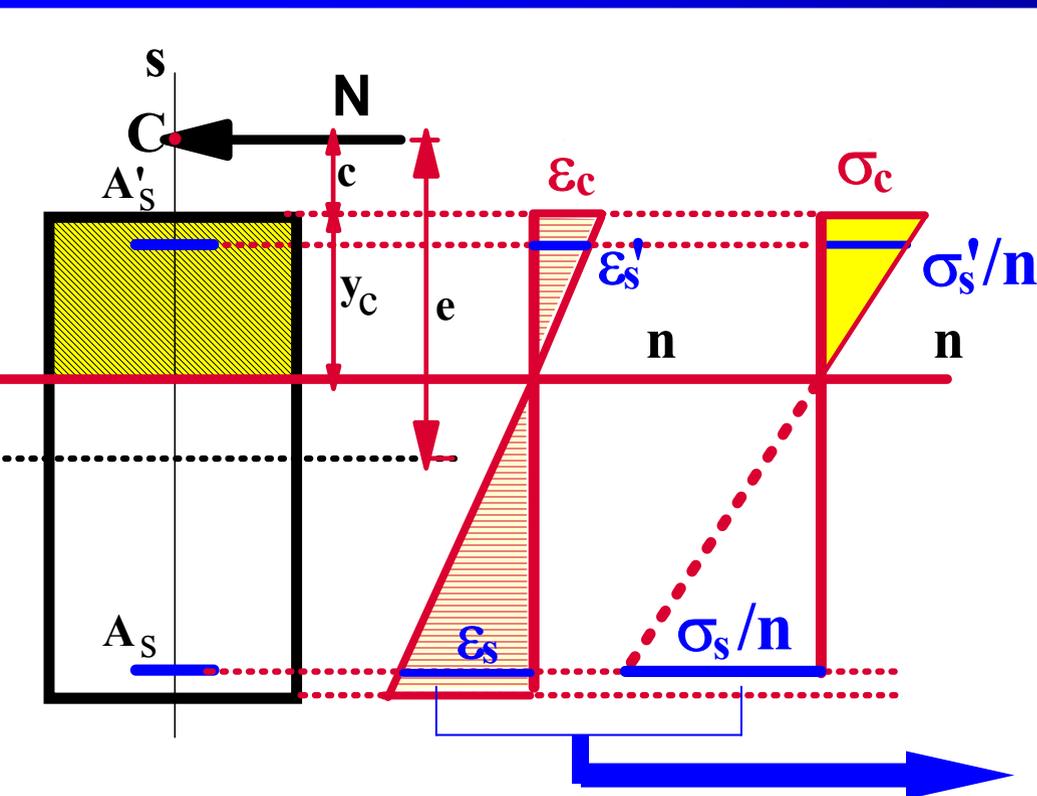
Metodo delle tensioni ammissibili

Legami costitutivi dei materiali

Le tensioni e le deformazioni nei materiali vengono limitate a valori bassi



si assume valida l'ipotesi di elasticità lineare dei materiali



ϵ_s
0.0010
↕
0.0012

σ_s
2200
↕
2600

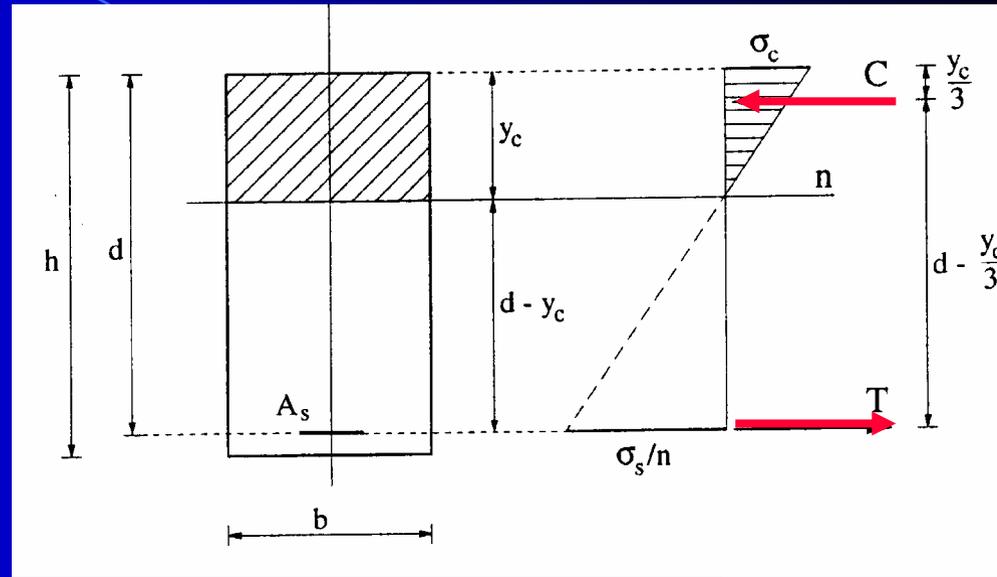
FeB38k
↕
FeB44k



Metodo delle tensioni ammissibili

calcolo dello stato tensionale nell'ipotesi di elasticità lineare

Esempio della
sezione a semplice
armatura inflessa



Equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse dell'elemento:

$$S_n = 0 \quad \rightarrow \quad y_c = \frac{n A_s}{b} \cdot \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 b d}{n A_s}} \right]$$

Equilibrio alla rotazione:

$$M_{rc} = \frac{\bar{\sigma}_c b y_c}{2} \left(d - \frac{y_c}{3} \right) \quad M_{rs} = \bar{\sigma}_s A_s \left(d - \frac{y_c}{3} \right)$$

Legami costitutivi dei materiali

Stati limite ultimi per tensioni normali

Cosa si intende per Stato Limite Ultimo di una sezione?

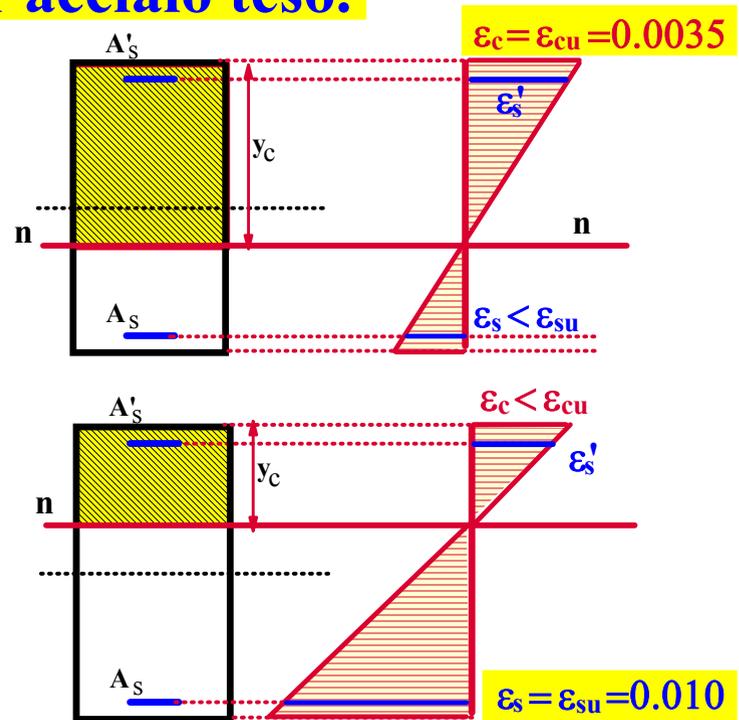
Lo stato limite ultimo di una sezione è individuato dal raggiungimento della **massima deformazione del calcestruzzo compresso o dell'acciaio teso.**

- Deformazione ultima del **calcestruzzo**:

$$\varepsilon_{cu} = 0.0035$$

- Deformazione ultima dell'**acciaio**:

$$\varepsilon_{su} = 0.0100$$



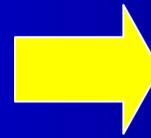
Ipotesi di base negli stati limite ultimi

- Conservazione delle sezioni piane
- Omogeneità ed isotropia del calcestruzzo in zona compressa e dell'armatura
- Aderenza tra acciaio e calcestruzzo
- Trascurabilità della resistenza a trazione del calcestruzzo
- Deformazione massima del calcestruzzo pari -0.0035 nel caso di flessione semplice e composta con asse neutro interno alla sezione, e variabile da detto valore fino a -0.002 per asse neutro esterno alla sezione
- Deformazione massima dell'armatura tesa pari a $+0.010$

Legami costitutivi dei materiali

Stati limite ultimi per tensioni normali

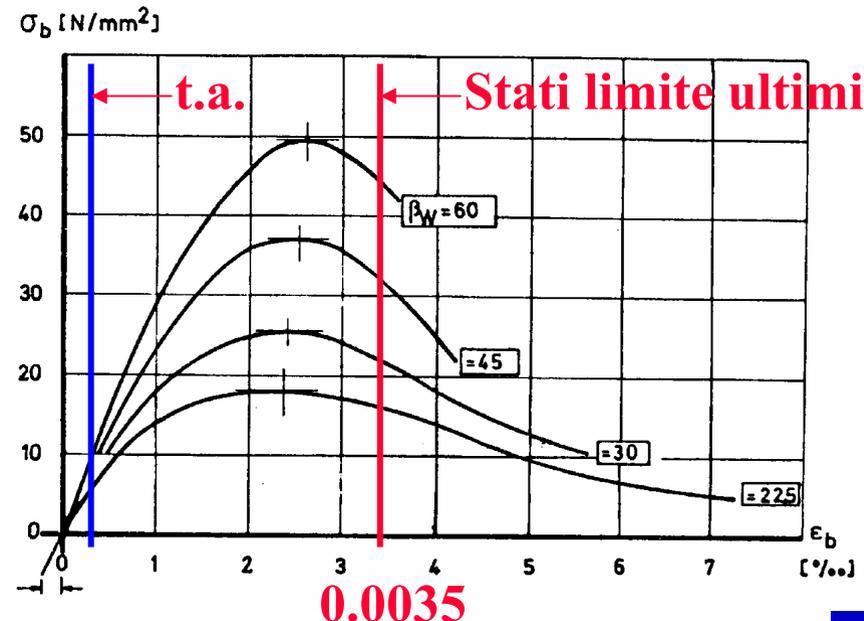
Si considera lo stato tensionale corrispondente alle deformazioni ultime dei materiali



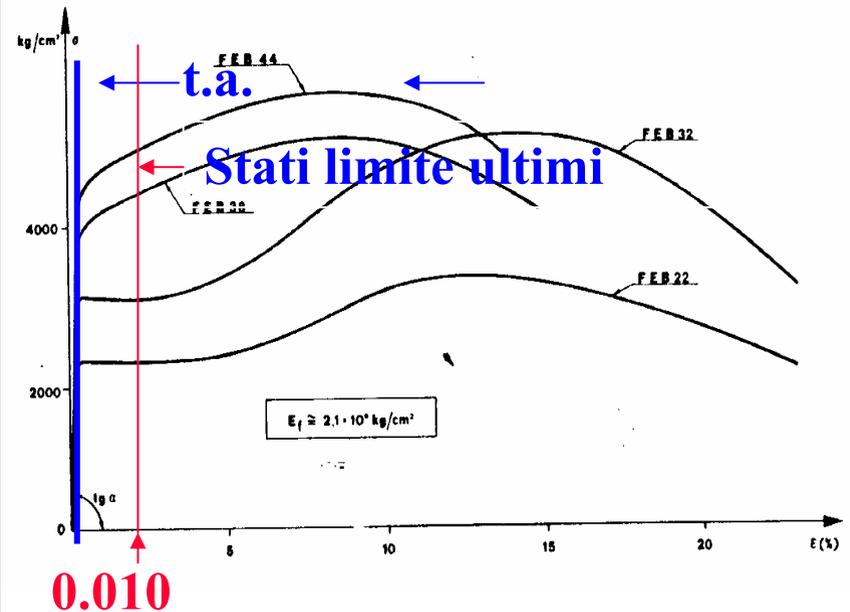
Occorre definire il legame costitutivo dei materiali accurato fino alla condizione ultima

200

CALCESTRUZZO

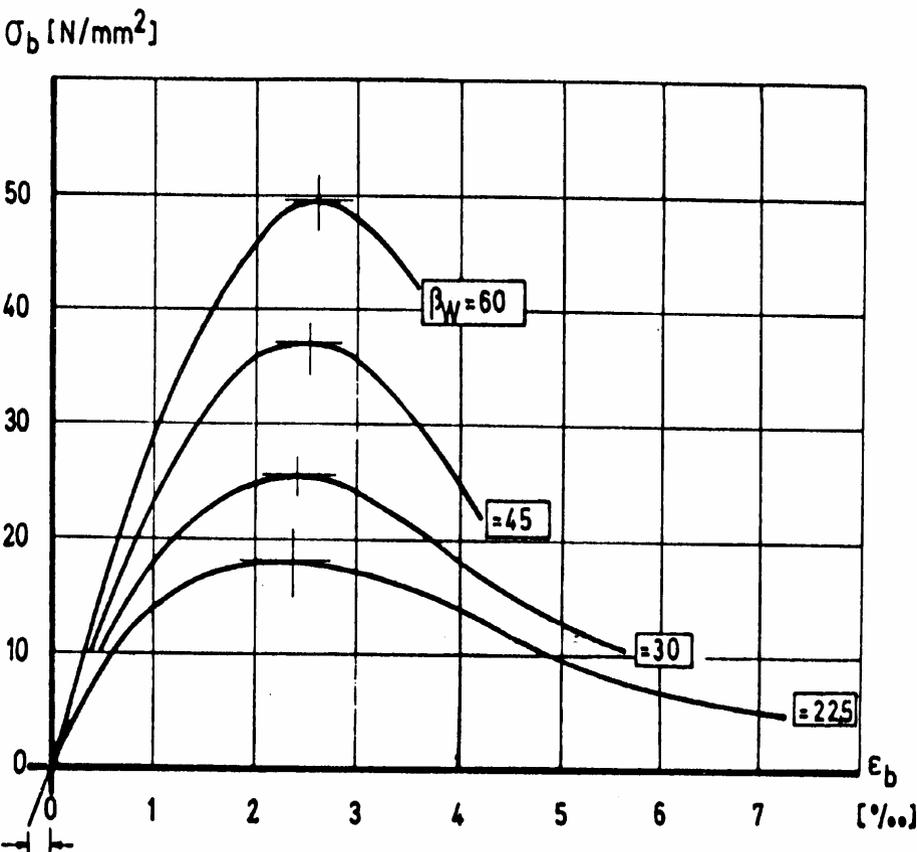


ACCIAIO



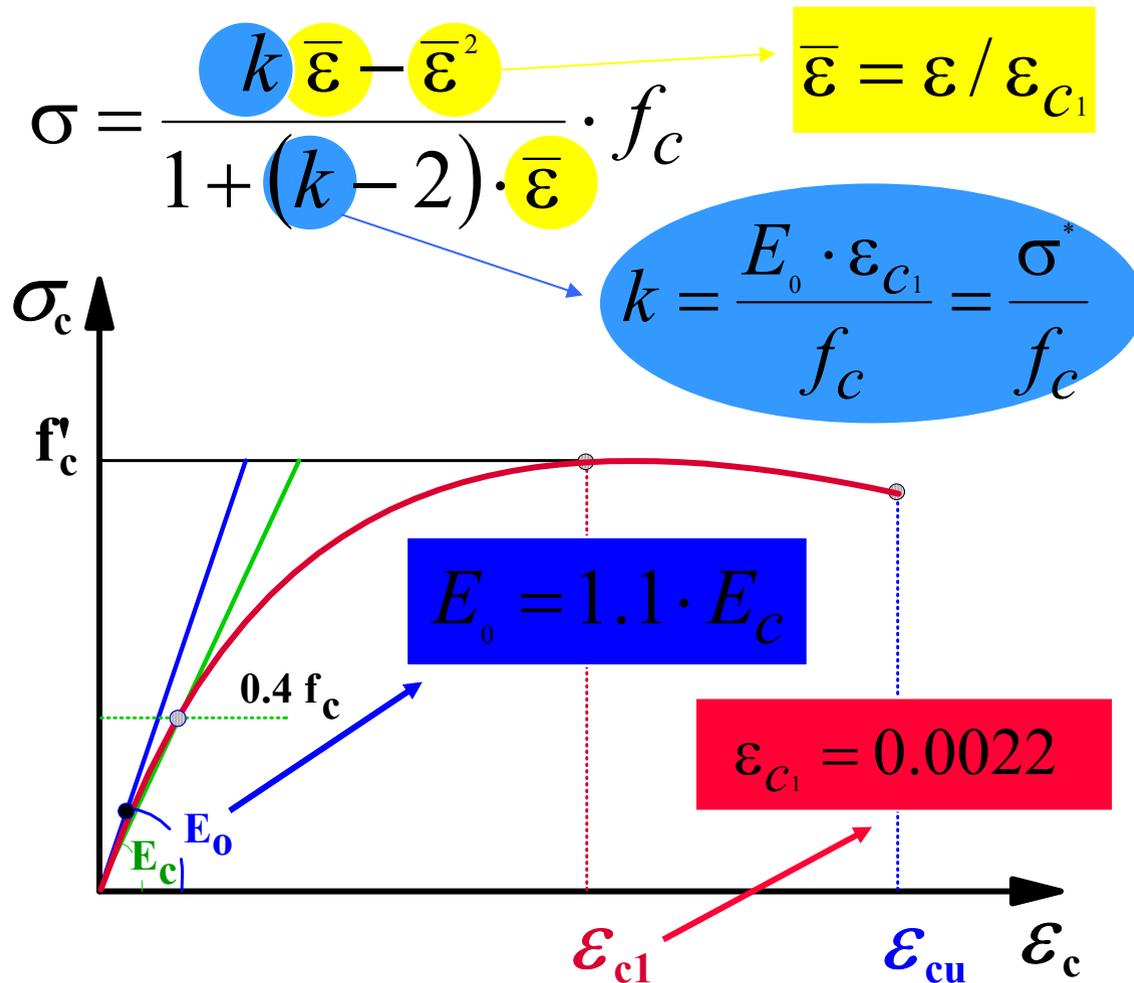
Legami costitutivi dei materiali:

il calcestruzzo



- Il legame σ - ϵ è non lineare fin da valori modesti della deformazione
- La deformazione corrispondente alla tensione massima è pressoché costante al variare della resistenza del cls
- Dopo il valore massimo della resistenza il legame σ - ϵ procede con un tratto decrescente la cui pendenza aumenta all'aumentare della resistenza
- Il valore della deformazione massima aumenta al diminuire della resistenza

Legami costitutivi dei materiali: il calcestruzzo: legge di **Saenz**



• (introdotta per la prima volta a livello di codici dal CEB nel Model Code del 1976)

• **EUROCODICE 2** “progettazione delle strutture in c.a.)

Diagramma per l’analisi strutturale: analisi non lineare o analisi plastica

$$\varepsilon_{cu} = 0.0037 - 0.0008 \cdot (f_c - 150) / 400 \quad (= 0.0029 \div 0.0037)$$

Legame costitutivo del calcestruzzo per il progetto e verifica della sezione trasversale

Norme contenute nello stesso Decreto 9/1/1996

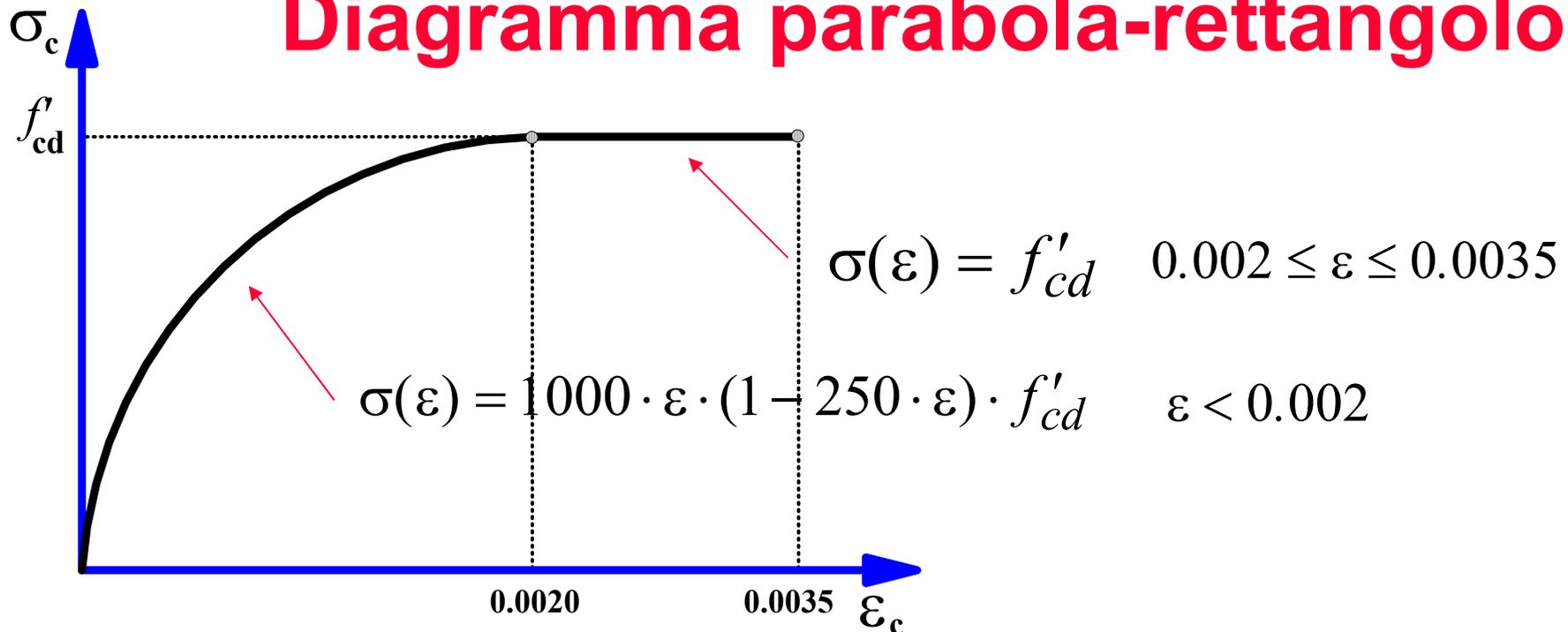
EUROCODICE 2 con modifiche ed integrazioni



A) Diagramma parabola-rettangolo

B) Stress block

Diagramma parabola-rettangolo

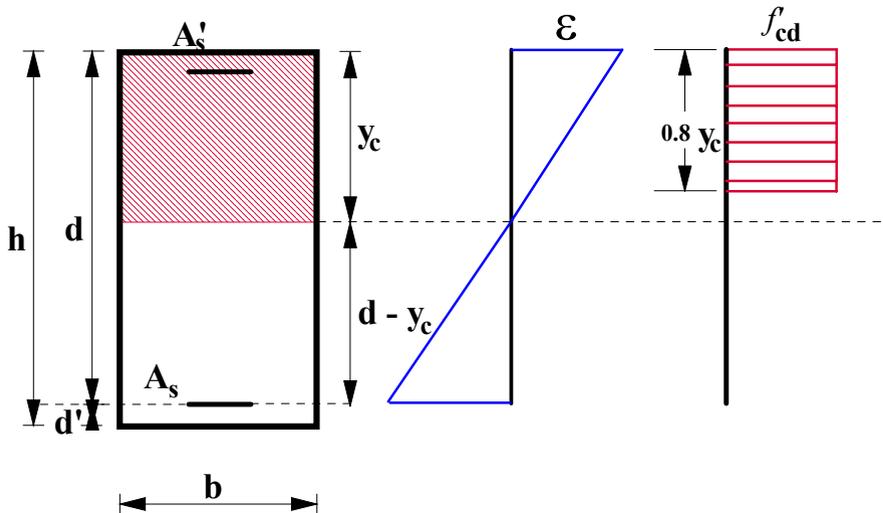


Stress Block

Si considera allo s.l.u. un diagramma tensionale costante con tensione pari a f_{cd} esteso alla parte di sezione compresa tra il bordo più compresso e y'_c :

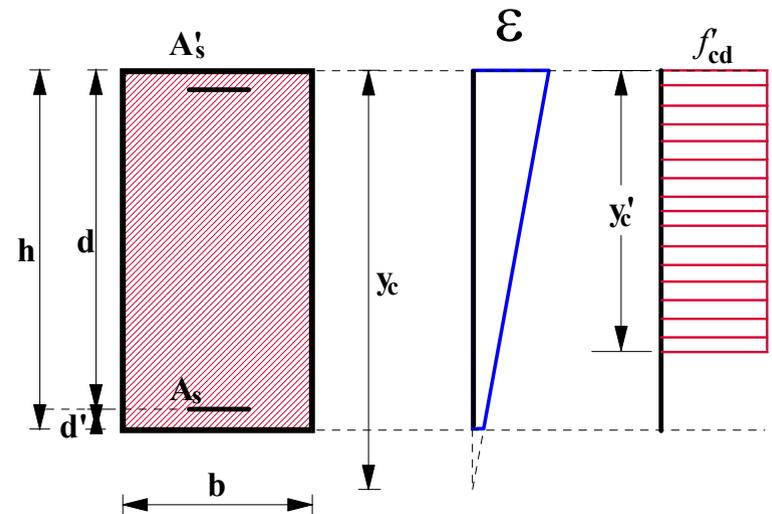
Asse neutro interno alla sezione

$$y'_c = 0.8 \cdot y_c$$



Asse neutro esterno alla sezione

$$y'_c = \frac{y_c - 0.80 \cdot h}{y_c - 0.75 \cdot h} \cdot h$$

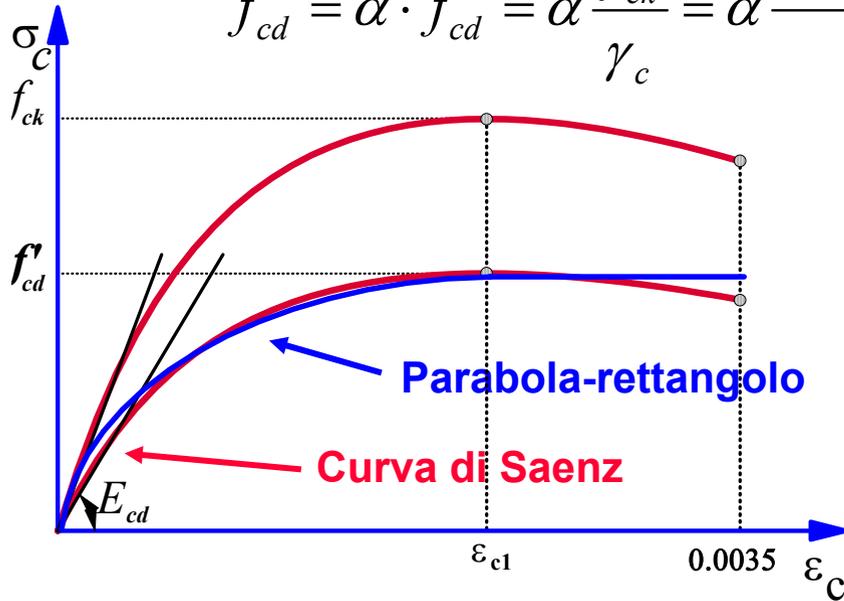


Differenti modelli per il calcestruzzo

$$f'_{cd} = \alpha \cdot f_{cd} = \alpha \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \alpha \frac{0.83 \cdot R_{ck}}{1.5}$$

$$\alpha = 0.85$$

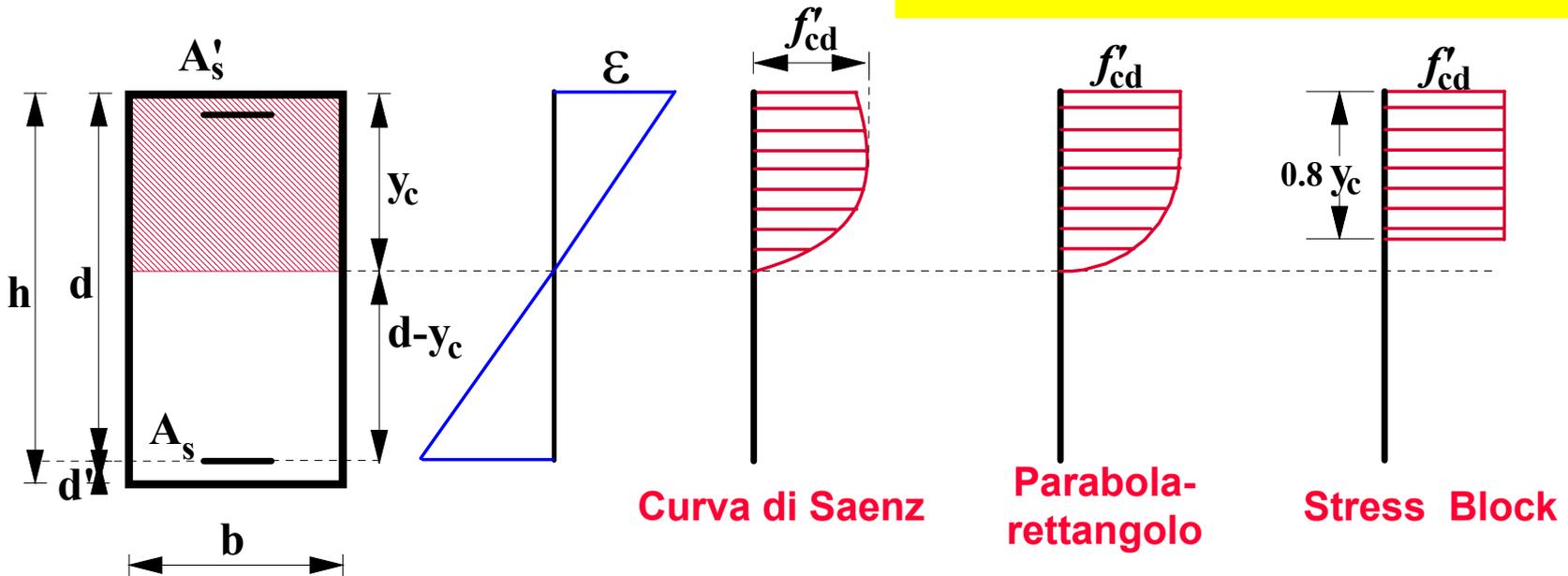
$\alpha=0.80$ nel caso di **STRESS BLOCK** con sezione di larghezza crescente dalla fibra maggiormente compressa verso l'asse neutro



Coeff. γ_c - Stati limite ultimi (Decreto 9/1/1996)

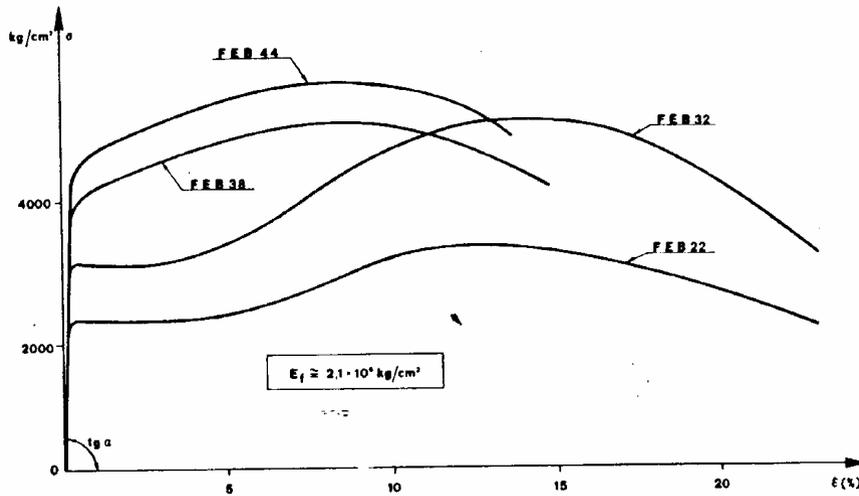
$\gamma_c=1.5$ c.a.p.

$\gamma_c=1.6$ c.a. e c.a.p. con pre-compressione parziale



Legami costitutivi dei materiali

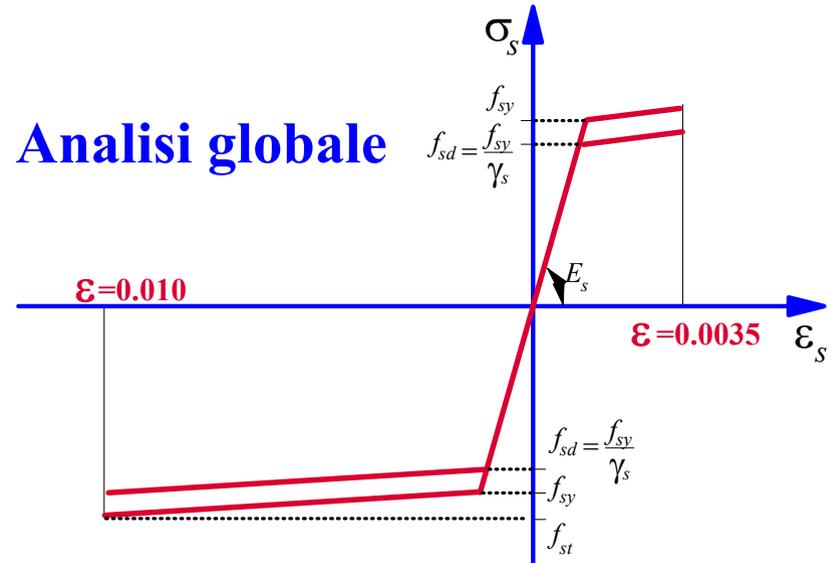
L'acciaio



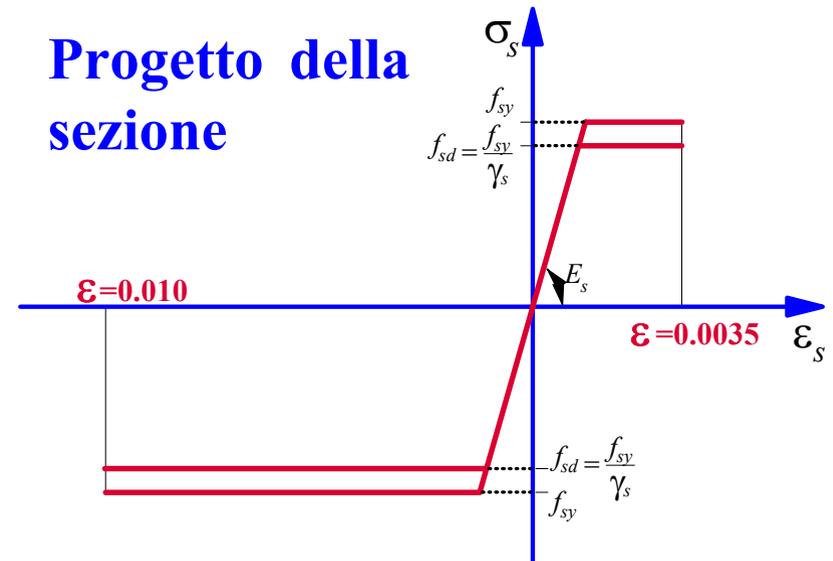
Coeff. γ_s - Stati limite ultimi
(Decreto 9/1/1996)

$$\gamma_s = 1.15$$

Analisi globale



Progetto della sezione



Possibili condizioni limiti della sezione generica

$$y_{2,3} = \frac{0.0035}{0.01 + 0.0035} \cdot (h - d')$$

$$y_{3,4} = \frac{0.0035}{(f_{sd}/E_s) + 0.0035} \cdot (h - d')$$

$$\varepsilon_c = 0.002$$

$$\varepsilon_s > 0$$

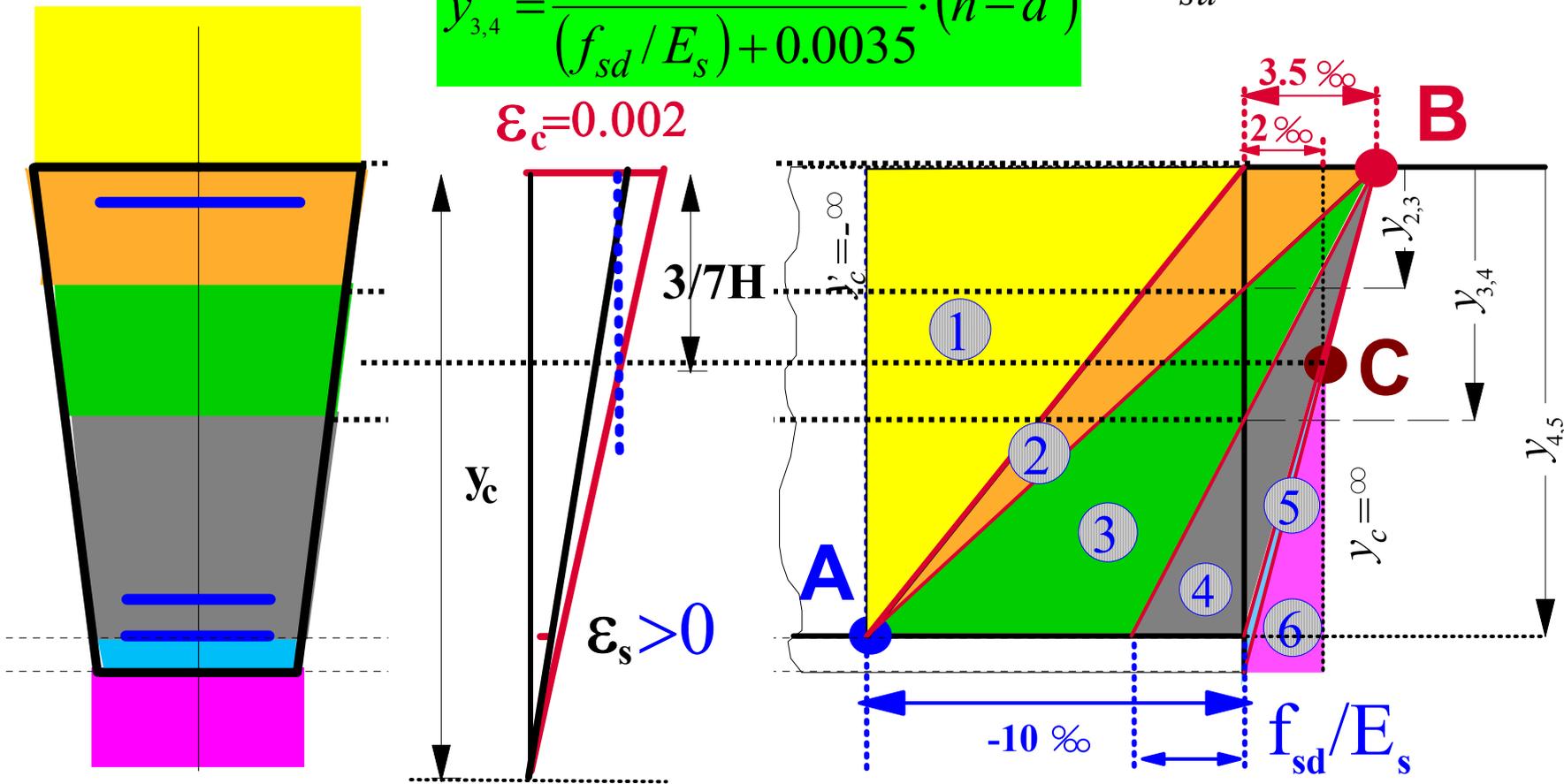
Deformazione ultima del **calcestruzzo**:

$$\varepsilon_{cu} = 0.0035$$

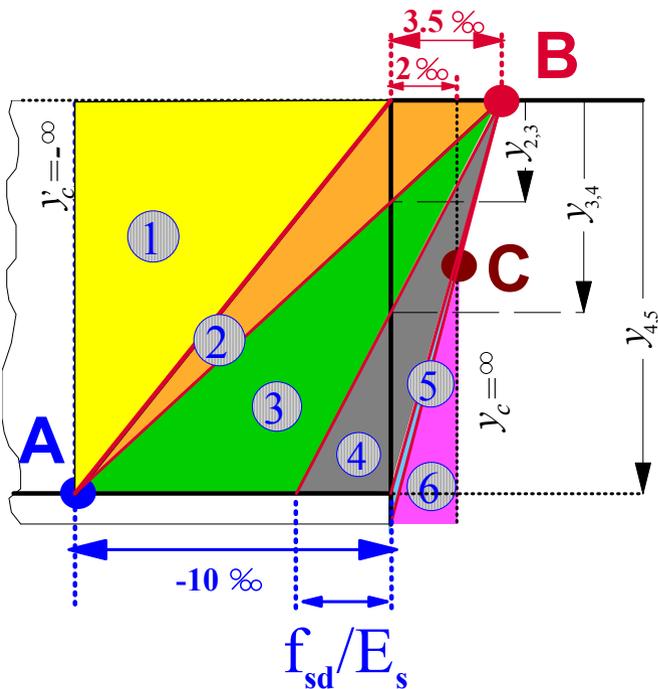
$$\varepsilon'_{cu} = 0.0020$$

Deformazione ultima dell'**acciaio**:

$$\varepsilon_{su} = 0.0100$$

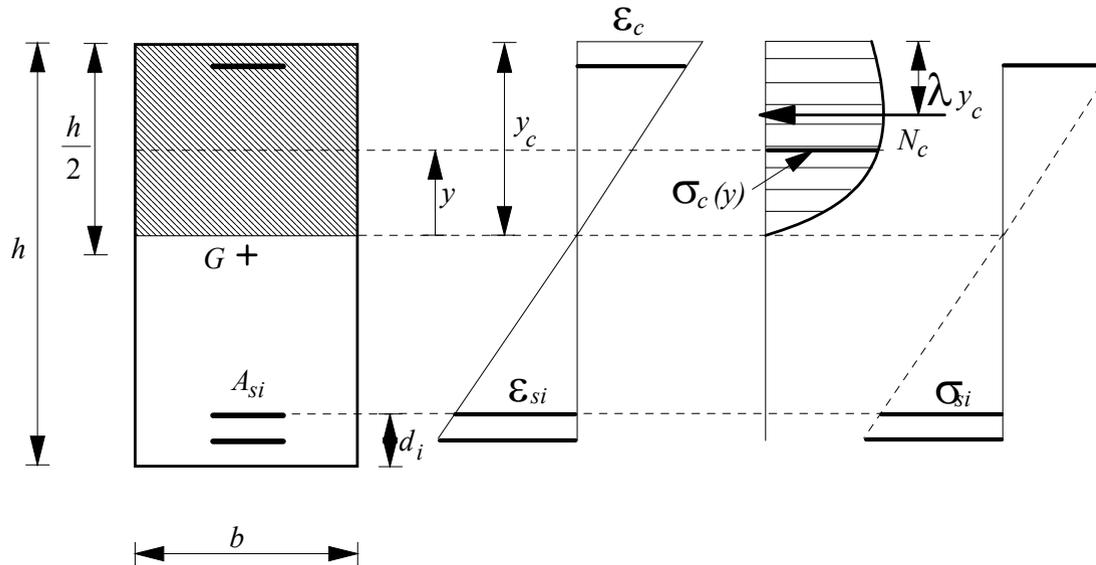


Stati di sollecitazione



ZONE	POSIZIONE ASSE NEUTRO	STATI DI SOLLECITAZIONE
1	$-\infty < y_c < 0$	(tenso flessione o trazione pura)
2	$0 < y_c < y_{2,3}$	(tenso-presso flessione/flessione)
3	$y_{2,3} < y_c < y_{3,4}$	(tenso-presso flessione/flessione)
4	$y_{3,4} < y_c < d$	(tenso-presso flessione/flessione)
5	$d < y_c < h$	(presso flessione)
6	$h < y_c < +\infty$	(presso flessione/compr. sempl.)

Equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione intorno all'asse baricentrico



Equilibrio alla traslazione:

$$b \cdot \int_0^{y_c} \sigma(y) dy + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si} = N$$

Equilibrio alla rotazione intorno all'asse baricentrico:

$$b \cdot \int_0^{y_c} \sigma(y) \cdot [(h/2) - y_c + y] dy + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si} \cdot [d_i - (h/2)] = N \cdot e = M$$

Equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione intorno all'asse baricentrico

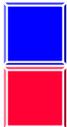
Ponendo:

$$\psi = \frac{\int_0^{y_c} \sigma(y) dy}{y_c \cdot f'_{cd}} \quad \lambda = \frac{1}{y_c} \left[\frac{\int_0^{y_c} \sigma(y) \cdot (y_c - y) dy}{\int_0^{y_c} \sigma(y) dy} \right] = 1 - \left[\frac{\int_0^{y_c} \sigma(y) \cdot y dy}{y_c^2 \cdot \psi \cdot f'_c} \right]$$

Si ottiene:

$$b \cdot y_c \cdot \psi \cdot f'_{cd} + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si} = N_u$$

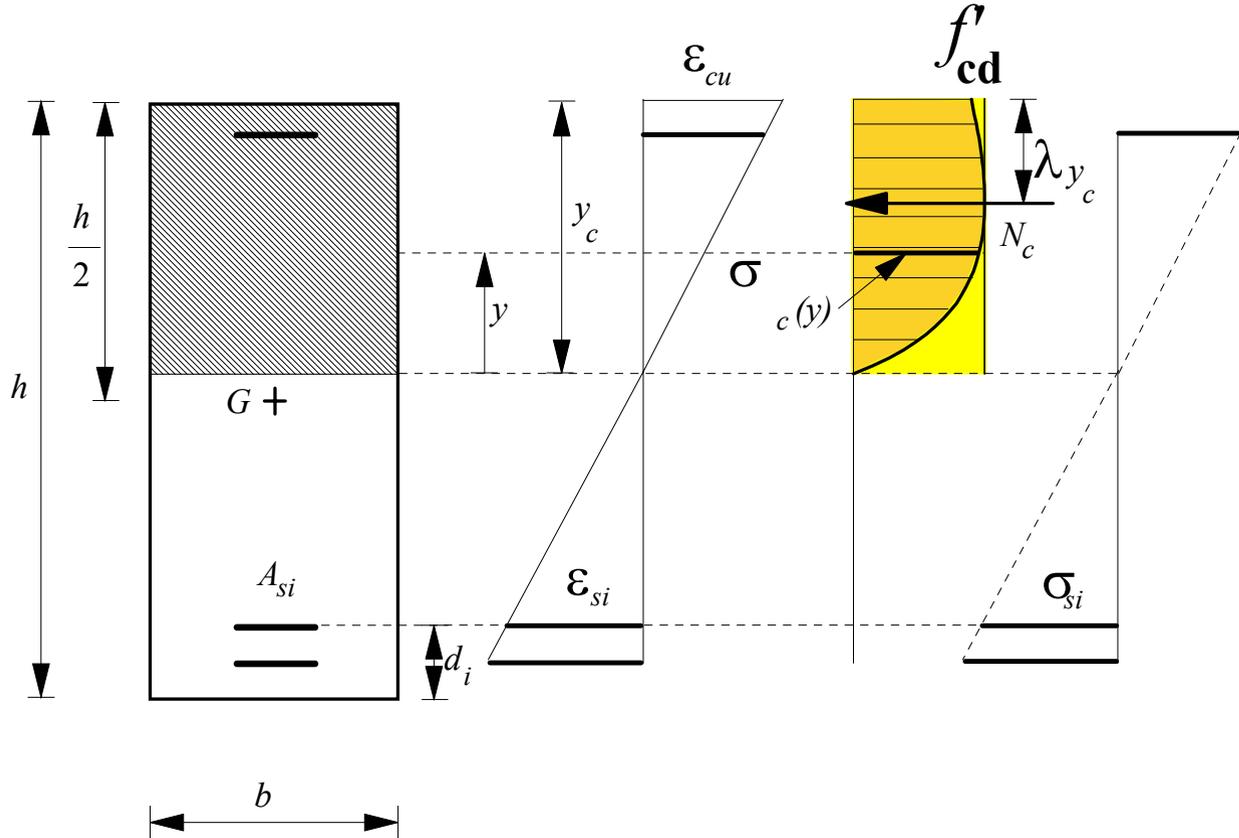
$$b \cdot y_c \cdot \psi \cdot f'_{cd} \left[(h/2) - \lambda y_c \right] + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si} \left[d_i - (h/2) \right] = M_{uG}$$



Coefficienti ψ e λ

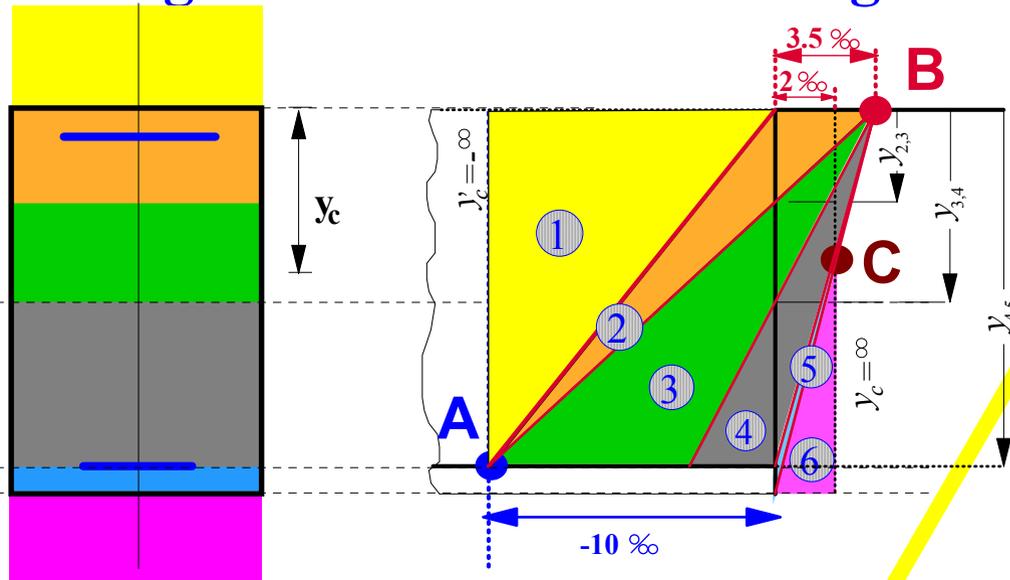
$$\psi = \frac{\int_0^{y_c} \sigma(y) dy}{y_c \cdot f'_{cd}}$$

$$\lambda = \frac{1}{y_c} \left[\frac{\int_0^{y_c} \sigma(y) \cdot (y_c - y) dy}{\int_0^{y_c} \sigma(y) dy} \right] = 1 - \left[\frac{\int_0^{y_c} \sigma(y) \cdot y dy}{y_c^2 \cdot \psi \cdot f'_c} \right]$$



Coefficienti ψ e λ sezione rettangolare

Diagramma Parabola-rettangolo



Stress block

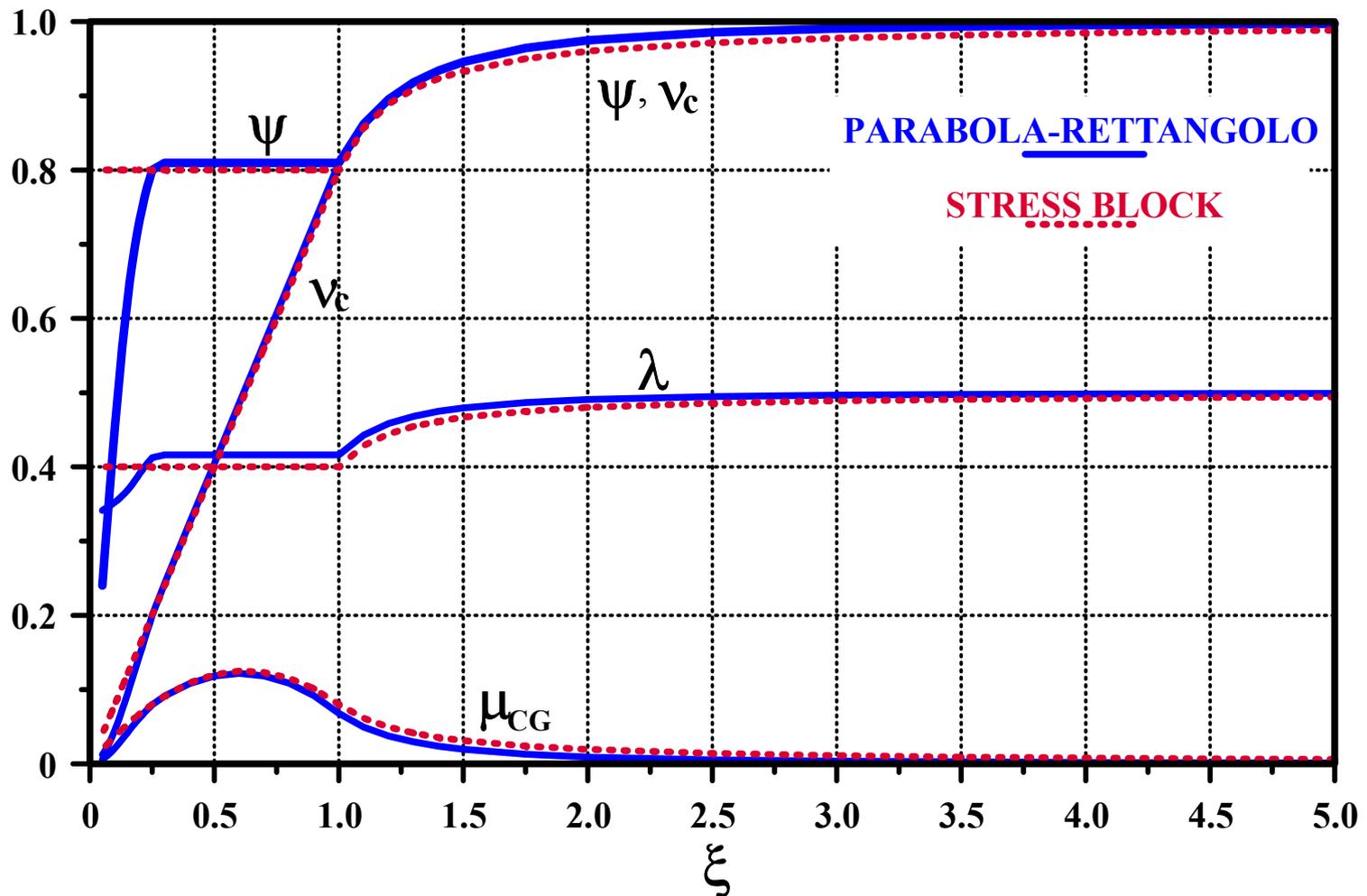
$$\psi = 0.8 \quad \lambda = 0.4$$

$$\psi = \frac{y_c - 0.80 \cdot h}{y_c - 0.75 \cdot h} \quad \lambda = \psi/2$$

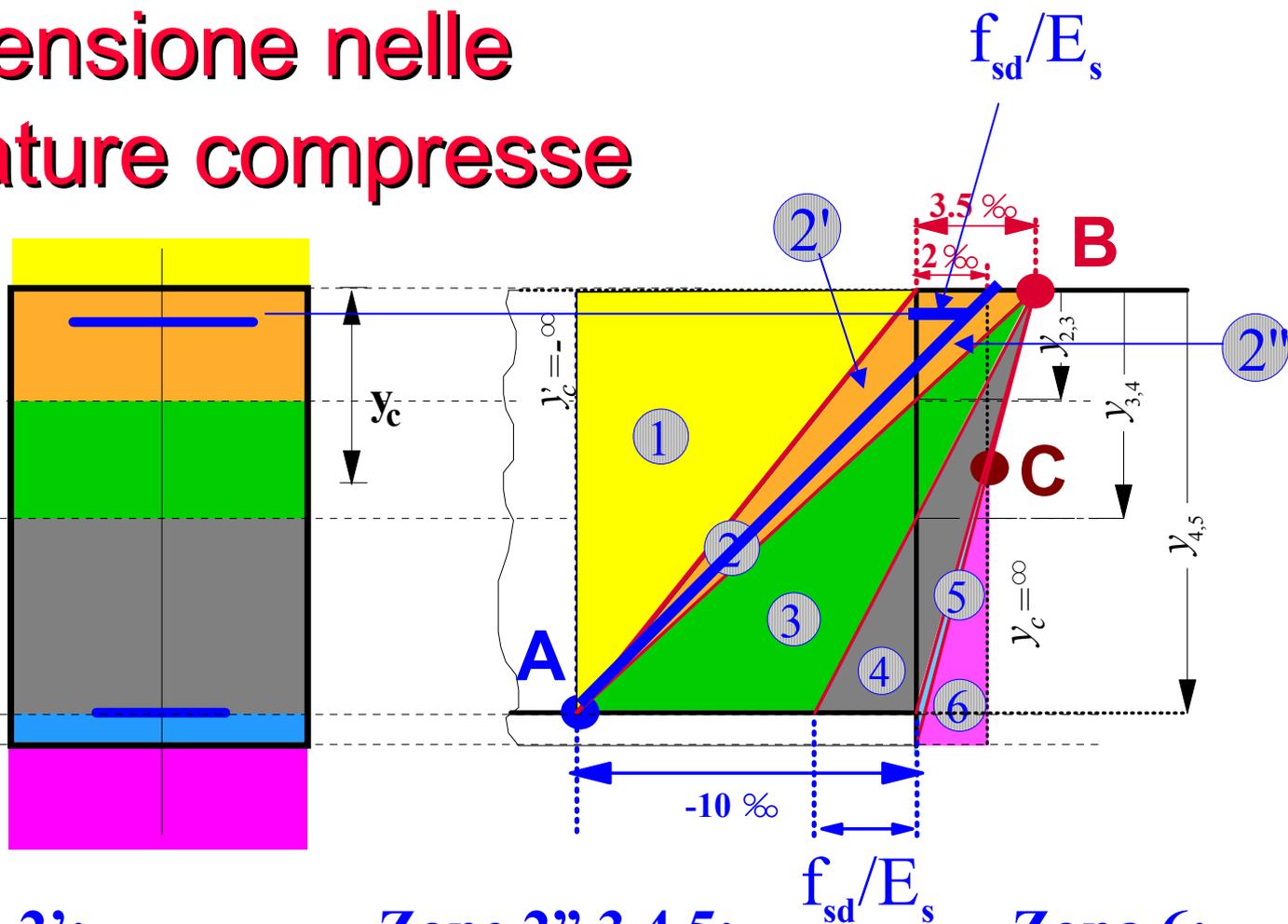
ξ ψ λ v_c μ_{cG}

0.05	0.2401	0.3413	0.0120	0.0058
0.06	0.2852	0.3433	0.0171	0.0082
0.07	0.3291	0.3453	0.0230	0.0110
0.08	0.3718	0.3475	0.0297	0.0140
0.09	0.4130	0.3498	0.0372	0.0174
0.10	0.4527	0.3523	0.0453	0.0210
0.11	0.4907	0.3550	0.0540	0.0249
0.12	0.5269	0.3578	0.0632	0.0289
0.13	0.5611	0.3610	0.0729	0.0330
0.14	0.5931	0.3644	0.0830	0.0373
0.15	0.6228	0.3681	0.0934	0.0416
0.16	0.6500	0.3721	0.1040	0.0458
0.17	0.6745	0.3765	0.1147	0.0500
0.18	0.6963	0.3813	0.1253	0.0541
0.19	0.7158	0.3861	0.1360	0.0580
0.20	0.7333	0.3909	0.1467	0.0619
0.21	0.7492	0.3956	0.1573	0.0656
0.22	0.7636	0.4001	0.1680	0.0692
0.23	0.7768	0.4044	0.1787	0.0727
0.24	0.7889	0.4086	0.1893	0.0761
0.25	0.8000	0.4125	0.2000	0.0794
0.30	0.8095	0.4160	0.2429	0.0911
0.40	0.8095	0.4160	0.3238	0.1080
0.50	0.8095	0.4160	0.4048	0.1182
0.60	0.8095	0.4160	0.4857	0.1216
0.70	0.8095	0.4160	0.5667	0.1183
0.80	0.8095	0.4160	0.6476	0.1083
0.90	0.8095	0.4160	0.7286	0.0915
1.00	0.8095	0.4160	0.8095	0.0680
1.10	0.8620	0.4428	0.8620	0.0493
1.20	0.8955	0.4583	0.8955	0.0373
1.30	0.9181	0.4681	0.9181	0.0293
1.40	0.9341	0.4748	0.9341	0.0235
1.50	0.9458	0.4795	0.9458	0.0194
1.75	0.9644	0.4868	0.9644	0.0127
2.00	0.9748	0.4908	0.9748	0.0090
2.50	0.9855	0.4947	0.9855	0.0052
3.00	0.9906	0.4966	0.9906	0.0034
3.50	0.9934	0.4976	0.9934	0.0024
4.00	0.9951	0.4982	0.9951	0.0017
4.50	0.9962	0.4987	0.9962	0.0013
5.00	0.9970	0.4989	0.9970	0.0011

Andamento dei coefficienti ψ e λ



Tensione nelle armature compresse



Zone 1,2':

$$\varepsilon'_s = -\frac{0.01}{d - y_c} \cdot (d' - y_c)$$

$$\sigma'_s = E_s \varepsilon'_s$$

Zone 2'',3,4,5:

$$\varepsilon'_s \geq \frac{f'_{sd}}{E_s} \Rightarrow \sigma'_s = f'_{sd}$$

Zona 6:

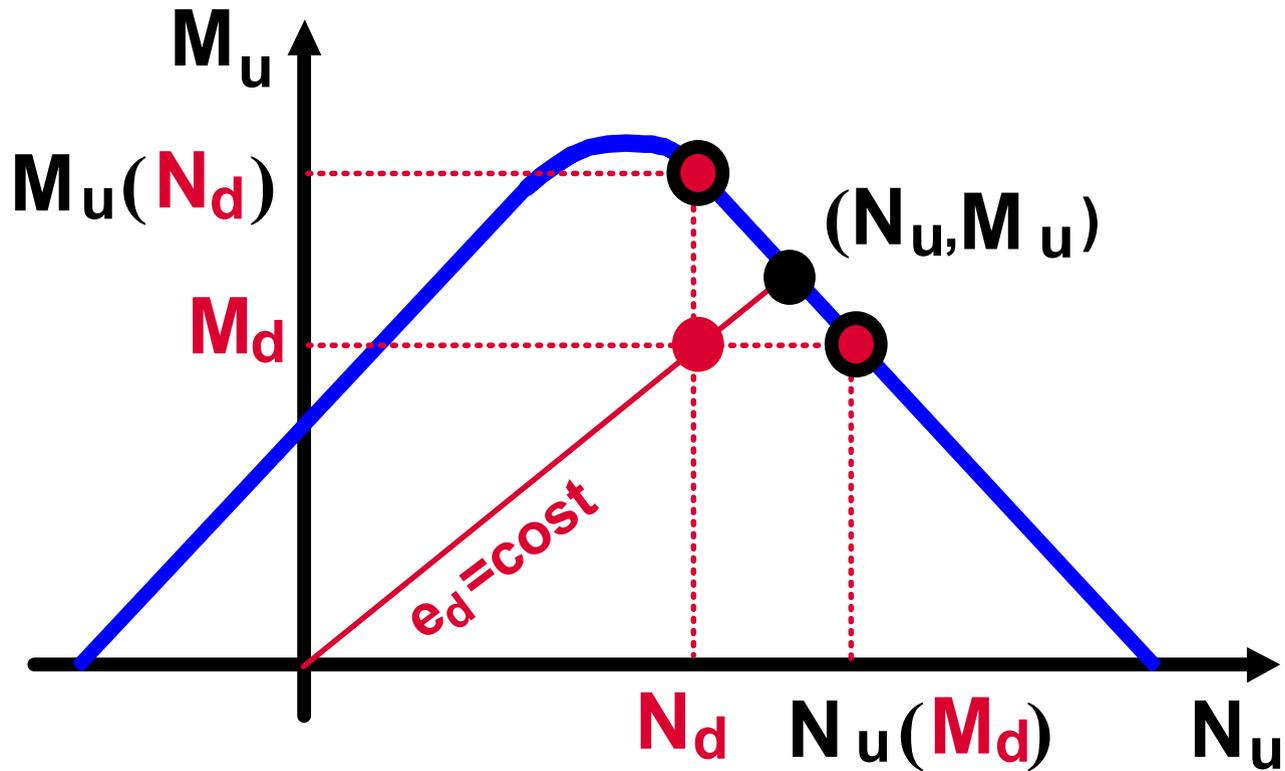
$$\varepsilon'_s \geq \frac{f'_{sd}}{E_s} \Rightarrow \sigma'_s = f'_{sd}$$

$$b \cdot y_c \cdot \psi \cdot f'_{cd} + A_s \cdot \sigma_s + A'_s \cdot \sigma'_s = N_u$$

$$b \cdot y_c \cdot \psi \cdot f'_{cd} \cdot \left(\frac{h}{2} - \lambda \cdot y_c \right) + A_s \cdot \sigma_s \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - A'_s \cdot \sigma'_s \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) = M_{uG}$$

Zona	σ_s	σ'_s	ψ	λ			
1	$-f_{sd}$	$E_s \cdot \varepsilon_s ; -f_{sd}$	0	0			
2	$-f_{sd}$	f_{sd}	0.8	0.4			
3	$-f_{sd}$	f_{sd}	0.8	0.4			
4	$E_s \cdot \varepsilon_s$	f_{sd}	0.8	0.4			
5	$E_s \cdot \varepsilon_s$	f_{sd}	0.8	0.4			
6	$E_s \cdot \varepsilon_s ; f_{sd}$	f_{sd}	0.8 – 1.0	0.4 – 0.5			

Sezione rettangolare: verifica



Verifica tipo A: $N_u = N_d \Rightarrow M_d \leq M_u(N_d)$

Verifica tipo B: $M_u = M_d \Rightarrow N_d \leq N_u(M_d)$

Verifica tipo C: $e_u = e_d = \frac{M_d}{N_d} = \Rightarrow N_d \leq N_u(e_d)$ ■

Sezione rettangolare: verifica

Escludendo la zona 1 (relativa alla tensoflessione) e la zona 6 di scarso interesse per ragioni di duttilità, applicando lo Stress block si ha:

Equilibrio alla traslazione (determinazione posizione asse neutro):

a) armatura compressa in campo elastico:

L'equazione determinatrice dell'asse neutro si presenta nella forma seguente:

$$0.8 \cdot b \cdot y_c \cdot f'_{cd} + A'_s \cdot E_s \cdot \frac{0.01}{d - y_c} \cdot (y_c - d') - A_s \cdot f_{sd} = N_u$$

che risulta una equazione di 2° grado in y_c con coefficienti a_2 , a_1 , a_0 , forniti dalle seguenti relazioni

$$a_2 = 0.8 \cdot b \cdot f'_{cd}$$

$$a_1 = -(0.8 \cdot b \cdot d \cdot f'_{cd} + 0.01 \cdot A'_s \cdot E_s + A_s \cdot f_{sd} + N_u)$$

$$a_0 = 0.01 \cdot A'_{sd} \cdot E_s \cdot d' + A_s \cdot f_{sd} \cdot d + N_u \cdot d$$



Sezione rettangolare: verifica

b) armature entrambe snervate:

L'equazione di equilibrio alla traslazione diventa:

$$0.8 \cdot b \cdot y_c \cdot f'_{cd} + A'_s \cdot f_{sd} - A_s \cdot f_{sd} = N_u$$

$$y_c = \frac{N_u + A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot f_{sd}}{0.8 \cdot b \cdot f'_{cd}}$$

c) armatura inferiore in campo elastico:

L'equazione di equilibrio alla traslazione diventa:

$$0.8 \cdot b \cdot y_c \cdot f'_{cd} + A'_s \cdot f_{sd} - A_s \cdot E_s \cdot \frac{0.0035}{y_c} \cdot (d - y_c) = N_u$$

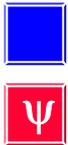
che risulta una equazione di 2° grado in y_c con coefficienti a_2 , a_1 , a_0 , forniti dalle seguenti relazioni

$$a_2 = 0.8 \cdot b \cdot f'_{cd} \quad a_1 = A'_s \cdot f_{sd} + 0.0035 A_s \cdot E_s - N_u \quad a_0 = -0.0035 A_s \cdot E_s \cdot d$$

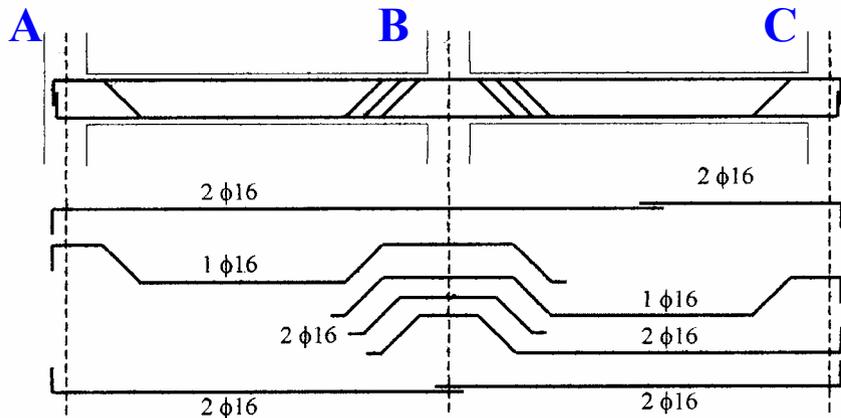
Equilibrio alla rotazione intorno al baricentro:

$$M_{uG} = \psi \cdot b \cdot y_c \cdot f'_{cd} \cdot \left(\frac{h}{2} - \lambda \cdot y_c \right) + A'_s \cdot \sigma'_s \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - A_s \cdot \sigma_s \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right)$$

Esempio di verifica di sezione rettangolare a flessione semplice



Verifica allo stato limite ultimo della sezione in corrispondenza dell'appoggio B, soggetta al momento flettente $M_d = -30000 \text{ kgm}$



Resistenze di calcolo del calcestruzzo e dell'acciaio:

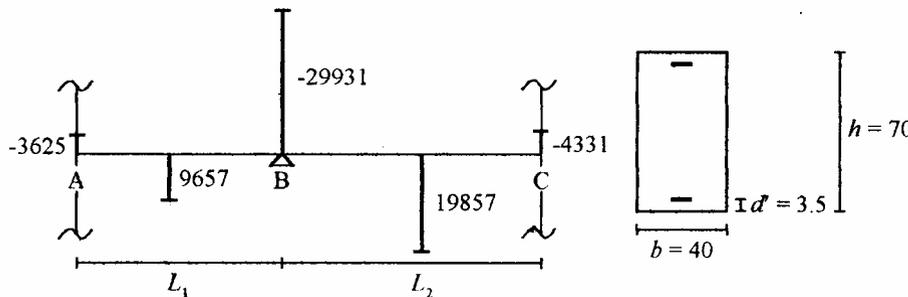
$$f'_{cd} = 0.85 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0.85 \frac{0.83 \cdot R_{ck}}{1.6} = 110 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{sd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{3800}{1.15} = 3304 \text{ kg/cm}^2$$

Determinazione della posizione dell'asse neutro:

si supponga inizialmente di essere nella zona in cui le armature sono entrambe snervate. L'equazione di equilibrio alla traslazione diventa, utilizzando il diagramma "stress-block" per il calcestruzzo:

$$0.8 \cdot b \cdot \gamma_c \cdot f'_{cd} \cdot A'_s \cdot f_{sd} - A_s \cdot f_{sd} = N_u = 0$$



Cls: $R_{ck}=250 \text{ kg/cm}^2$ – acciaio: FeB38k

cui segue

$$y_c = \frac{A_s \cdot f_{sd} - A'_s \cdot f_{sd}}{0.8 \cdot b \cdot f'_{cd}} = \frac{16.08 \cdot 3304 - 4.02 \cdot 3304}{0.8 \cdot 40 \cdot 110} = 11.32 \text{ cm}$$

I limiti della zona in cui le armature sono snervate sono:

$$y_{2',2''} = \frac{(f_{sd}/E_s) \cdot d + 0.01 \cdot d'}{0.01 \cdot (f_{sd}/E_s)} = \frac{(3304/2100000) \cdot 66.5 + 0.01 \cdot 3.5}{0.01 \cdot (3304/2100000)} = 12.06 \text{ cm}$$

$$y_{3,4} = \frac{0.0035}{(f_{sd}/E_s) + 0.0035} \cdot (h - d') = \frac{0.0035}{(3304/2100000) + 0.0035} \cdot (70 - 3.5) = 45.88 \text{ cm}$$

per cui si ricade nella zona con l'armatura compressa in campo elastico:

$$y_c < y_{2',2''}$$

In tale zona l'equazione determinatrice della posizione dell'asse neutro è:

$$0.8 \cdot b \cdot y_c \cdot f'_{cd} + A'_s \cdot E_s \cdot \frac{0.01}{d - y_c} \cdot (y_c - d') - A_s \cdot f_{sd} = N_u = 0$$

che diventa un'equazione di II grado in y_c

$$a_2 \cdot y_c^2 + a_1 \cdot y_c + a_0 = 0$$

dove

$$a_0 = 0.01 \cdot A'_s \cdot E_s \cdot d' + A_s \cdot f_{sd} \cdot d + N_u \cdot d = 0.01 \cdot 4.02 \cdot 2100000 \cdot 3.5 + 16.08 \cdot 3304 \cdot 66.5 + 0 = 3828503$$

$$a_1 = -(0.8 \cdot b \cdot d \cdot f'_{cd} + 0.001 \cdot A'_s \cdot E_s + A_s \cdot f_{sd} - N_u) = -(0.8 \cdot 40 \cdot 66.5 \cdot 110 + 0.01 \cdot 4.02 \cdot 2100000 + 16.08 \cdot 3304 - 0) = -371628$$

$$a_2 = 0.8 \cdot b \cdot f'_{cd} = 0.8 \cdot 40 \cdot 110 = 3520$$

Risulta

$$3250 \cdot y_c^2 - 371628 \cdot y_c + 3828503 = 0$$

$$y_c = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{371628 - \sqrt{371628^2 - 4 \cdot 3520 \cdot 3828503}}{2 \cdot 3520} = 11.57 \text{ cm}$$

Il momento ultimo si ricava dall'equazione di equilibrio alla rotazione, che per la zona in esame è la seguente:

$$M_{uG} = 0.8 \cdot b \cdot y_c \cdot f'_{cd} \left(\frac{h}{2} - 0.4 \cdot y_c \right) + A'_s \cdot \sigma'_s \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) - A_s \cdot \sigma_s \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right)$$

dove

$$\begin{aligned}\sigma'_s &= E_s \cdot \varepsilon'_s = E_s \cdot \frac{0.01}{d - y_c} \cdot (y_c - d') = 2100000 \cdot \frac{0.01}{66.5 - 11.57} \cdot (11.57 - 3.5) = \\ &= 3085 \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$

$$\sigma_s = -f_{sd} = -3304 \text{ kg/cm}^2$$

Il momento ultimo vale, pertanto:

$$\begin{aligned}M_{uG} &= 0.8 \cdot 40 \cdot 11.57 \cdot 110 \cdot (35 - 0.4 \cdot 11.57) + 4.02 \cdot 3085 \cdot (35 - 3.5) + 16.08 \cdot 3304 \cdot \\ &\cdot (35 - 3.5) = 3301138 \text{ kgcm} = 33011 \text{ kgm}\end{aligned}$$

per cui la verifica è soddisfatta, essendo:

$$M_d = 30000 \text{ kgm} < M_{uG} = 33000 \text{ kgm}$$

Si osserva infine che l'asse neutro allo s.l.u. è nella zona 2:

$$\xi_u = \frac{y_c}{h} = \frac{11.57}{70} = 0.165 < \left[\xi_{2,3} = 0.259 \frac{d}{h} \right]$$

Trascurando l'armatura in compressione, il procedimento diventa molto più agevole. Infatti per l'asse neutro si ottiene:

$$y_c = \frac{A_s \cdot f_{sd}}{0.8 \cdot b \cdot f'_{cd}} = \frac{16.08 \cdot 3304}{0.8 \cdot 40 \cdot 110} = 15.09 \text{ cm}$$

In assenza di armatura in compressione non occorre verificare se l'armatura compressa è snervata o meno. Si può direttamente valutare il momento ultimo.

$$M_{UG} = 0.8 \cdot 40 \cdot 15.09 \cdot 110 \cdot (35 - 0.4 \cdot 15.09) + 16.08 \cdot 3304 \cdot (35 - 3.5) = 3.212.017 \text{ daN cm} = 32120 \text{ daN m}$$

(lievemente inferiore a 33011 daN m)

Domini di resistenza adimensionalizzati

Adimensionalizzazione

$$v_u = \frac{N_u}{b \cdot h \cdot f'_{cd}} \quad \mu_{u,G} = \frac{M_{u,G}}{b \cdot h^2 \cdot f'_{cd}} \quad \omega(\omega') = \frac{A_s(A'_s) \cdot f_{sd}}{b \cdot h \cdot f'_{cd}}$$
$$\xi = y_c/h \quad ; \quad \delta' = d'/h \quad ; \quad d/h = \frac{h - d'}{h} = 1 - \delta'$$

Ad esempio, introducendo le quantità adimensionali nell'equazione di equilibrio alla traslazione:

$$\frac{b \cdot y_c \cdot \psi \cdot f'_{cd}}{b \cdot h \cdot f'_{cd}} + \sum_{i=1}^n \frac{A_{si} \cdot \sigma_{si}}{b \cdot h \cdot f'_{cd} (f_{sd} / f_{sd})} = \frac{N}{b \cdot h \cdot f'_{cd}} = v_u$$

Le equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione diventano:

$$\psi \cdot \xi + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s}{f_{sd}} + \omega \cdot \frac{\sigma_s}{f_{sd}} = v_u$$

$$\psi \cdot \xi \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right) - \lambda \cdot \xi \right] + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s}{f_{sd}} \left[\left(\frac{1}{2} \right) - \delta' \right] - \omega \cdot \frac{\sigma_s}{f_{sd}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right) - \delta' \right] = \mu_{u,G}$$

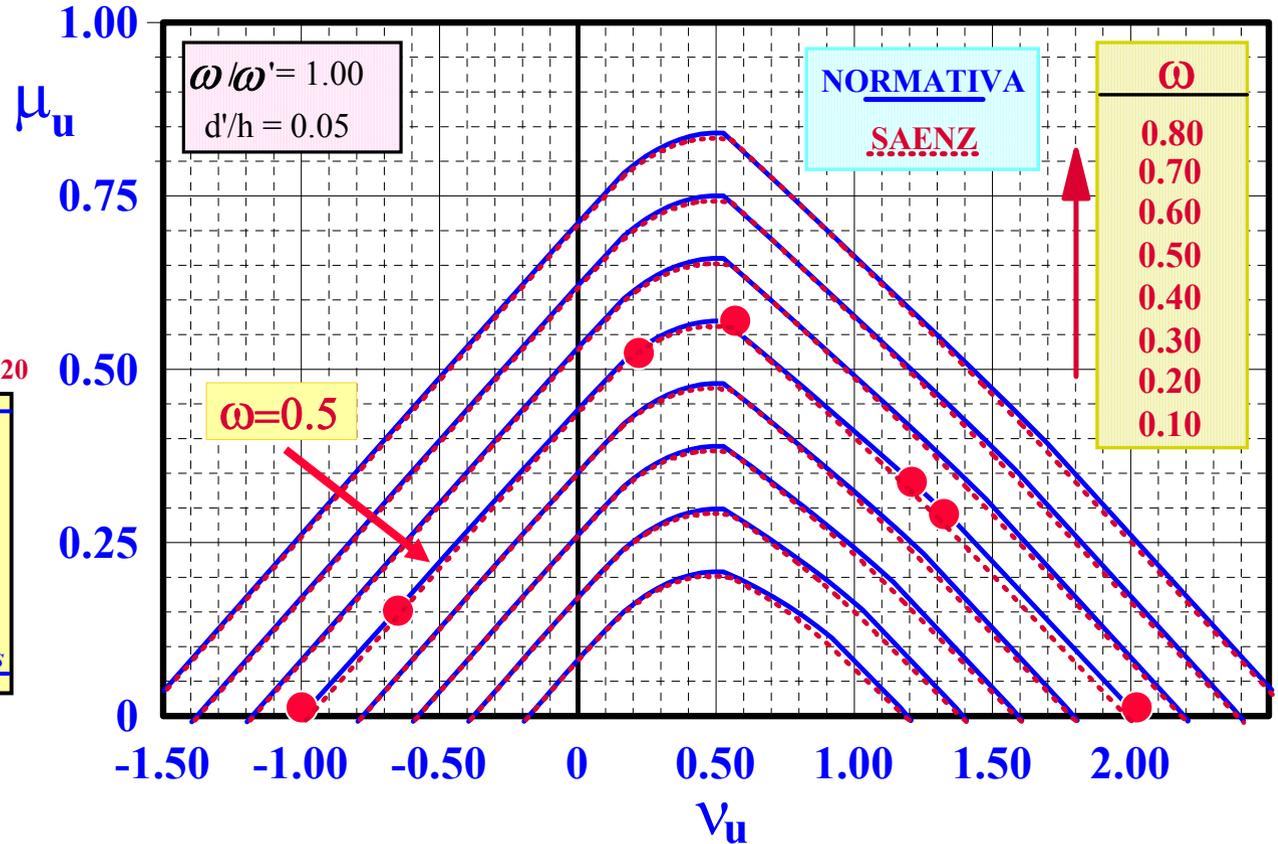
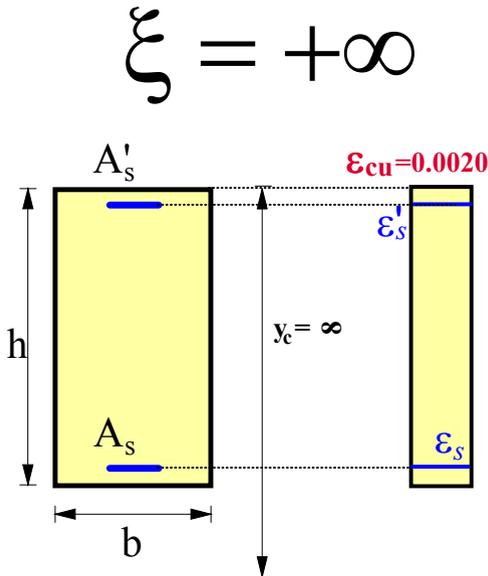


Domini di resistenza adimensionalizzati

$$\psi \cdot \xi + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s}{f_{sd}} + \omega \cdot \frac{\sigma_s}{f_{sd}} = v_u$$

$$\psi \cdot \xi \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right) - \lambda \cdot \xi \right] + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s}{f_{sd}} \left[\left(\frac{1}{2} \right) - \delta' \right] - \omega \cdot \frac{\sigma_s}{f_{sd}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right) - \delta' \right] = \mu_{u,G}$$

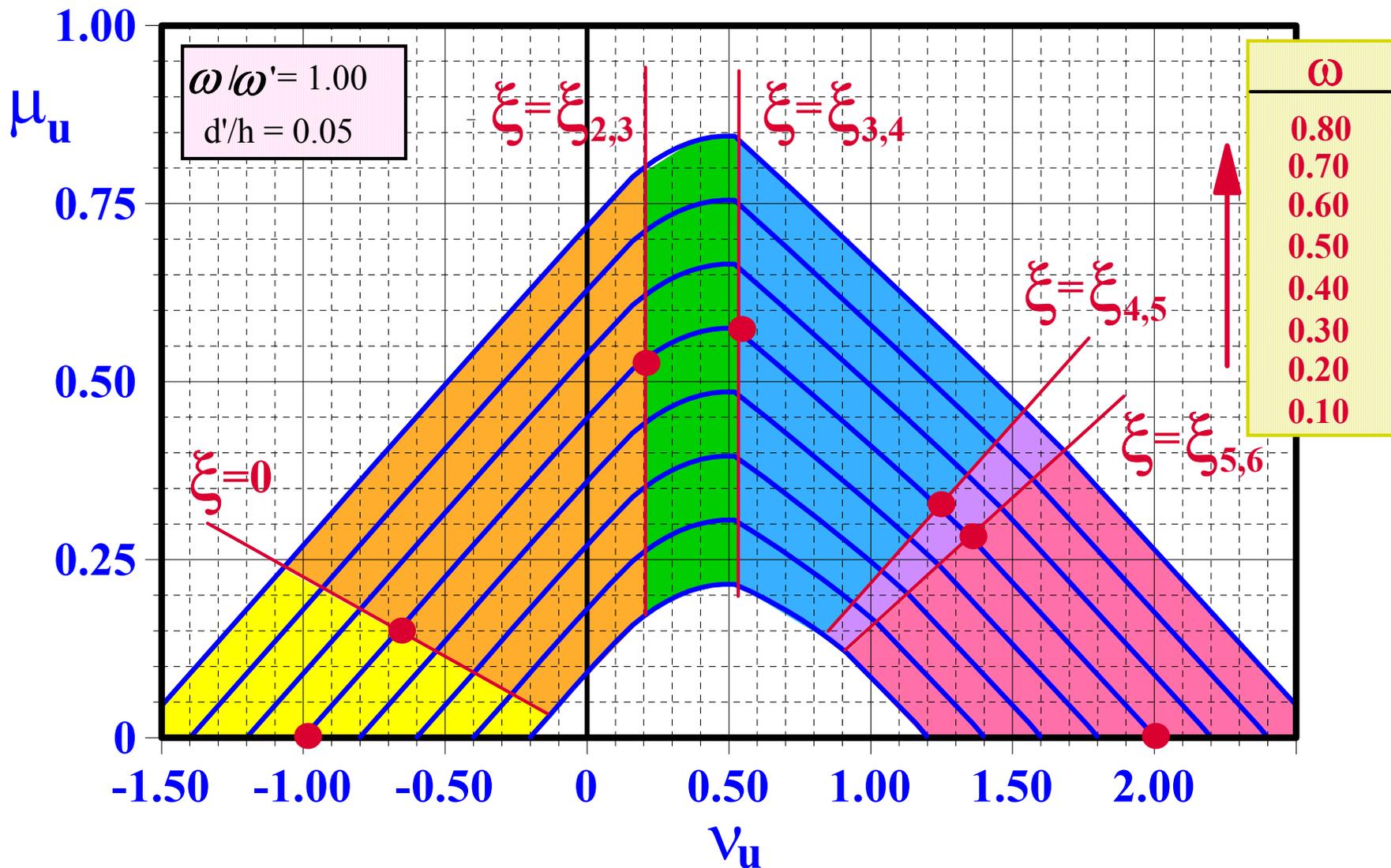
DOMINIO SEZIONE RETTANGOLARE - PRESSOFLESSIONE S.L.U.



$$v_{u6} = 1 + \omega + \omega' = 2.0 \quad \mu_{u,G6} = \omega' \cdot \left(\frac{1}{2} - \delta' \right) - \omega \cdot \left(\frac{1}{2} - \delta' \right) = 0$$

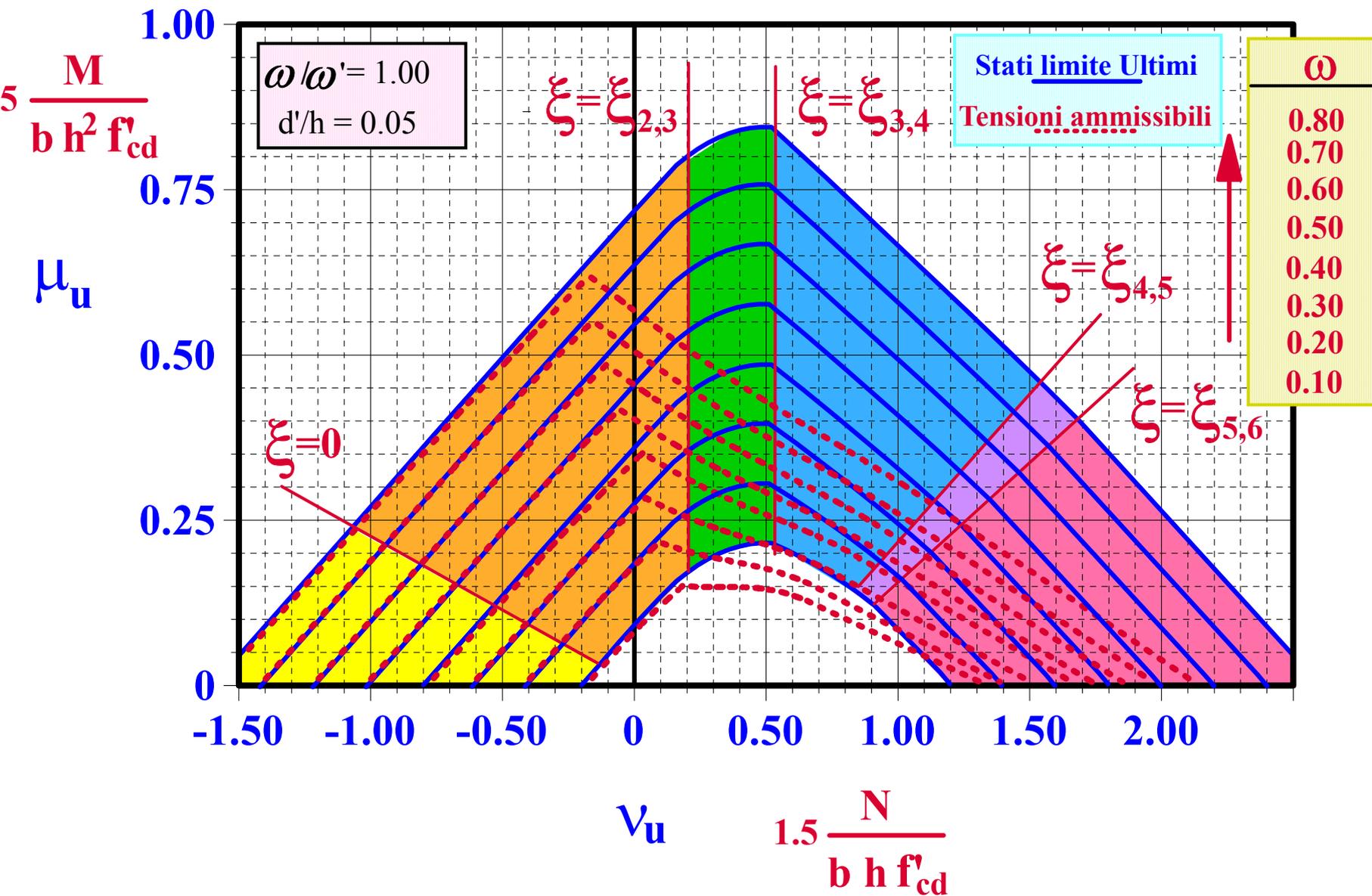
Domini di resistenza adimensionalizzati

DOMINIO SEZIONE RETTANGOLARE - PRESSOFLESSIONE S.L.U.



Confronto Tensioni Ammissibili-Stati Limite

Ultimi in termini di Dominio Resistente



Sezione rettangolare: problemi di progetto in flessione e pressoflessione

Le equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione in forma adimensionale risultano:

$$\psi \cdot \xi + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s}{f_{sd}} + \omega \cdot \frac{\sigma_s}{f_{sd}} = v_u$$

Traslazione

$$\psi \cdot \xi \cdot \left(\frac{1}{2} - \lambda \cdot \xi \right) + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s}{f_{sd}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \delta' \right) - \omega \cdot \frac{\sigma_s}{f_{sd}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \delta' \right) = \mu_{uG}$$

Rotazione intorno al baricentro

$$\psi \cdot \xi \cdot (1 - \delta' - \lambda \cdot \xi) + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s}{f_{sd}} \cdot (1 - 2\delta') = \mu_u$$

Rotazione intorno all'armatura tesa

Flessione

A progetto di $h(b)$ ed A_s con $b(h)$ ed il rapporto delle armature assegnati

B progetto di A_s e A'_s con b ed h assegnati

Pressoflessione

A progetto di $h(b)$ ed A_s noti $b(h)$ e le percentuali meccaniche di armatura

B progetto della sezione e delle armature mediante abachi $(1/v_u) - (e/h)$

Flessione: progetto di h o b ed A_s mediante Tabelle

$$\psi \cdot \xi + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s}{f_{sd}} + \omega \cdot \frac{\sigma_s}{f_{sd}} = v_u \quad \psi \cdot \xi \cdot (1 - \delta' - \lambda \cdot \xi) + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s}{f_{sd}} \cdot (1 - 2\delta') = \mu_u$$

$$\rho = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{A'_s}{A_s}$$

$$\omega = \frac{\psi \cdot \xi}{-\left[\left(\frac{\sigma_s}{f_{sd}}\right) + \rho \cdot \left(\frac{\sigma'_s}{f_{sd}}\right)\right]} \quad \psi \cdot \xi \cdot (1 - \delta' - \lambda \cdot \xi) + \rho \cdot \frac{\psi \cdot \xi}{-\left[\left(\frac{\sigma_s}{f_{sd}}\right) + \rho \cdot \left(\frac{\sigma'_s}{f_{sd}}\right)\right]} \cdot \frac{\sigma'_s}{f_{sd}} \cdot (1 - 2\delta') = \mu_u$$

$$\mu_u = \frac{M_u}{b \cdot h^2 \cdot f'_{cd}} = \mu_c(\xi) + \mu_\rho(\xi) \quad h = \frac{1}{\sqrt{f'_{cd} \cdot [\mu_c(\xi) + \mu_\rho(\xi)]}} \cdot \sqrt{\frac{M_u}{b}} = r_u \cdot \sqrt{\frac{M_u}{b}}$$

$$r_u = r_u(f'_{cd}, f_{sd}, \delta', \xi, \rho) = \frac{1}{\sqrt{f'_{cd} \cdot [\mu_c(\xi) + \mu_\rho(\xi)]}}$$

$$b = r_u^2 \cdot \frac{M_u}{h^2}$$

$$A_s = \omega \cdot \frac{b \cdot h \cdot f'_{cd}}{f_{sd}} = \frac{\psi \cdot \xi}{-\left[\rho \cdot \left(\frac{\sigma'_s}{f_{sd}} + \frac{\sigma_s}{f_{sd}}\right)\right]} \cdot \frac{b \cdot h \cdot f'_{cd}}{f_{sd}} \quad A_s = \frac{M_u}{\zeta \cdot h \cdot f_{sd}} \cdot \frac{b \cdot h \cdot f'_{cd}}{b \cdot h \cdot f'_{cd}} = \frac{\mu_u}{\zeta} \cdot \frac{b \cdot h \cdot f'_{cd}}{f_{sd}}$$

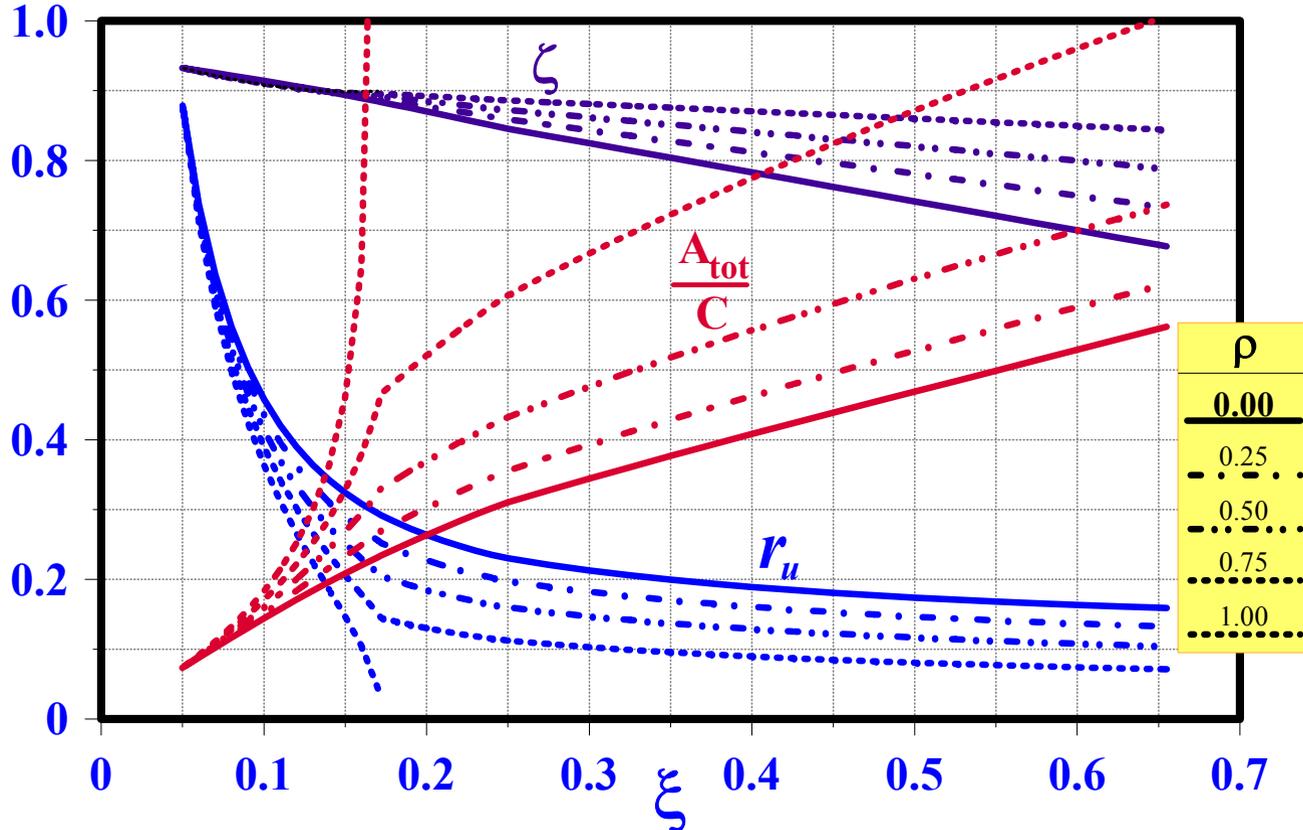
$$\zeta = \frac{\mu_u}{\omega} = \frac{\mu_c(\xi) + \mu_\rho(\xi)}{\omega}$$

$$A_s = \frac{M_u}{\zeta \cdot h \cdot f_{sd}}$$

Flessione: progetto di h o b ed A_s mediante Tabelle

$$h = r_u \cdot \sqrt{\frac{M_u}{b}} \quad b = r_u^2 \cdot \frac{M_u}{h^2} \quad r_u = r_u(f'_{cd}, f_{sd}, \delta', \xi, \rho)$$

$$A_s = \frac{M_u}{\zeta \cdot h \cdot f_{sd}} \quad \zeta = \zeta(f'_{cd}, f_{sd}, \delta', \xi, \rho)$$



Coefficienti

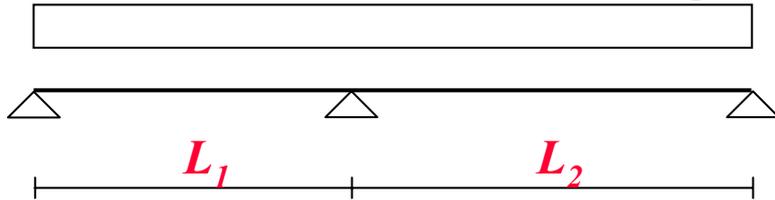
r_u e ζ

$$r_u = r_u(f'_{cd}, f_{sd}, \delta', \xi, \rho)$$

$$\zeta = \zeta(f'_{cd}, f_{sd}, \delta', \xi, \rho)$$

$\xi = y_c/h$	$f'_{cd} = 110 \text{ kg/cm}^2$		$f_{sd} = 3304 \text{ kg/cm}^2$		$d'/h = 0.05$					
	$\rho = 0$		$\rho = 0.25$		$\rho = 0.50$		$\rho = 0.75$		$\rho = 1.00$	
	r_u	ζ	r_u	ζ	r_u	ζ	r_u	ζ	r_u	ζ
0.050	0.8784	0.9329	0.8784	0.9329	0.8784	0.9329	0.8784	0.9329	0.8784	0.9329
0.060	0.7374	0.9294	0.7310	0.9288	0.7245	0.9283	0.7180	0.9278	0.7114	0.9273
0.070	0.6370	0.9258	0.6257	0.9248	0.6142	0.9239	0.6024	0.9230	0.5904	0.9221
0.080	0.5620	0.9221	0.5468	0.9209	0.5310	0.9197	0.5148	0.9185	0.4979	0.9173
0.090	0.5040	0.9184	0.4854	0.9171	0.4660	0.9157	0.4457	0.9143	0.4243	0.9130
0.100	0.4580	0.9146	0.4364	0.9133	0.4136	0.9119	0.3894	0.9105	0.3635	0.9092
0.110	0.4206	0.9108	0.3963	0.9096	0.3703	0.9083	0.3423	0.9071	0.3116	0.9059
0.120	0.3898	0.9068	0.3629	0.9059	0.3338	0.9050	0.3019	0.9041	0.2661	0.9032
0.130	0.3640	0.9028	0.3347	0.9023	0.3025	0.9019	0.2665	0.9015	0.2246	0.9011
0.140	0.3423	0.8986	0.3106	0.8989	0.2753	0.8991	0.2347	0.8993	0.1855	0.8996
0.150	0.3239	0.8943	0.2898	0.8954	0.2512	0.8966	0.2055	0.8977	0.1465	0.8988
0.160	0.3082	0.8899	0.2716	0.8921	0.2295	0.8944	0.1781	0.8966	0.1040	0.8988
0.170	0.2947	0.8853	0.2556	0.8889	0.2098	0.8925	0.1513	0.8961	0.0436	0.8997
0.172	0.2918	0.8842	0.2521	0.8881	0.2054	0.8921	0.1449	0.8960	0	0
0.180	0.2830	0.8805	0.2444	0.8854	0.1990	0.8903	0.1403	0.8951	0	0
0.190	0.2727	0.8757	0.2353	0.8818	0.1915	0.8879	0.1349	0.8939	0	0
0.200	0.2635	0.8708	0.2273	0.8781	0.1848	0.8854	0.1301	0.8927	0	0
0.210	0.2554	0.8659	0.2201	0.8744	0.1788	0.8829	0.1258	0.8915	0	0
0.220	0.2480	0.8609	0.2136	0.8707	0.1734	0.8804	0.1219	0.8902	0	0
0.230	0.2413	0.8558	0.2077	0.8669	0.1685	0.8779	0.1184	0.8890	0	0
0.240	0.2353	0.8508	0.2023	0.8631	0.1640	0.8754	0.1152	0.8877	0	0
0.250	0.2302	0.8460	0.1978	0.8595	0.1602	0.8730	0.1124	0.8865	0	0
0.275	0.2208	0.8356	0.1894	0.8517	0.1532	0.8678	0.1074	0.8839	0	0
0.300	0.2128	0.8252	0.1822	0.8439	0.1471	0.8626	0.1029	0.8813	0	0
0.325	0.2057	0.8148	0.1759	0.8361	0.1418	0.8574	0.0990	0.8787	0	0
0.350	0.1995	0.8044	0.1703	0.8283	0.1371	0.8522	0.0956	0.8761	0	0
0.375	0.1940	0.7940	0.1653	0.8205	0.1328	0.8470	0.0925	0.8735	0	0
0.400	0.1891	0.7836	0.1608	0.8127	0.1290	0.8418	0.0897	0.8709	0	0
0.425	0.1847	0.7732	0.1567	0.8049	0.1255	0.8366	0.0871	0.8683	0	0
0.450	0.1807	0.7628	0.1531	0.7971	0.1224	0.8314	0.0848	0.8657	0	0
0.475	0.1771	0.7524	0.1497	0.7893	0.1195	0.8262	0.0827	0.8631	0	0
0.500	0.1738	0.7420	0.1467	0.7815	0.1168	0.8210	0.0807	0.8605	0	0
0.525	0.1708	0.7316	0.1438	0.7737	0.1144	0.8158	0.0789	0.8579	0	0
0.550	0.1681	0.7212	0.1412	0.7659	0.1121	0.8106	0.0772	0.8553	0	0
0.575	0.1656	0.7108	0.1389	0.7581	0.1100	0.8054	0.0756	0.8527	0	0
0.600	0.1633	0.7004	0.1366	0.7503	0.1080	0.8002	0.0741	0.8501	0	0
0.625	0.1612	0.6900	0.1346	0.7425	0.1062	0.7950	0.0727	0.8475	0	0
0.650	0.1593	0.6796	0.1327	0.7347	0.1045	0.7898	0.0714	0.8449	0	0
0.655	0.1589	0.6774	0.1323	0.7330	0.1041	0.7887	0.0712	0.8443	0	0

Esempio di progetto di sezione rettangolare a flessione semplice



progetto dell'altezza h della sezione e dell'armatura

lunghezza campate: $L_1 = 4.2$ ml;

$L_2 = 5.3$ ml;

base: $b = 40$ cm;

carico permanente: $g_k = 4200$ kg/m

carico accidentale: $q_k = 2080$ kg/m

- calcestruzzo: $R_{ck} = 250$ kg/cm²

- acciaio: FeB38k

Amplificando i carichi caratteristici secondo i coefficienti parziali di sicurezza $\gamma_g = 1.4$ e $\gamma_q = 1.5$, si ottiene il carico di progetto:

$$q_d = 1.4 \cdot g_k + 1.5 \cdot q_k = 1.4 \cdot 4200 + 1.5 \cdot 2080 = 9000 \text{ kg/m}$$

Il momento massimo lungo la trave si ha in corrispondenza dell'appoggio intermedio e vale:

$$M_{B,d} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{q_d (L_1^3 + L_2^3)}{L_1 + L_2} = -26404 \text{ kgm}$$



Si esegue il progetto tabellare dell'altezza della sezione. La resistenza di progetto ridotta per calcestruzzo di classe $R_{ck} = 250 \text{ kg/cm}^2$ risulta essere

$$f'_{cd} = \frac{0.85 \cdot 0.83 \cdot 250}{1.6} = 110 \text{ kg/cm}^2$$

Adottando, in fase di dimensionamento un asse neutro di progetto $\xi = 0.25$, che assicura buoni requisiti di duttilità, dalla tabella di progetto allo s.l.u. per sezione rettangolare a semplice armatura relativa ad

$$f'_{cd} = 110 \text{ kg/cm}^2 \quad f_{sd} = 3800/1.15 = 3304 \text{ kg/cm}^2 \quad d'/h = 0.05$$

si ricavano i valori dei coefficiente r_u e ζ :

$$r_u (f'_{cd} = 110, d'/h = 0.05, f_{sd} = 3304, \rho = 0) = 0.2302$$

$$\zeta (f'_{cd} = 110, d'/h = 0.05, f_{sd} = 3304, \rho = 0) = 0.846$$

e quindi l'altezza minima della sezione:

$$h = r_u \cdot \sqrt{\frac{M_d}{b}} = 0.2302 \cdot \sqrt{\frac{26404}{0.40}} = 59.14 \text{ cm}$$

ξ	r_u	$h[\text{cm}]$
0.15	0.3239	83.22
0.20	0.2635	67.70
0.25	0.2302	59.14
0.30	0.2128	54.67
0.35	0.1995	51.25



L'armatura minima richiesta risulta:

$$A_s = \frac{M_u}{\zeta \cdot h \cdot f_{sd}} = \frac{2640400}{0.846 \cdot 60 \cdot 3304} = 15.74 \text{ cm}^2$$

Per confronto si esegue il progetto della sezione secondo il metodo delle tensioni ammissibili. In questo caso si considerano direttamente i carichi caratteristici:

$$q = g_k + q_k = 4200 + 2080 = 6280 \text{ kg/m}$$

per cui il momento massimo in corrispondenza dell'appoggio B vale:

$$M_B = \frac{1}{8} \cdot \frac{6280 \cdot (4.2^3 + 5.3^3)}{4.2 + 5.3} = 18424 \text{ kgm}$$

La tensione ammissibile per $R_{ck} = 250 \text{ kg/cm}^2$ vale $\bar{\sigma}_c = 85 \text{ kg/cm}^2$. Dalla tabella di progetto alle t.a. di sezioni rettangolari a semplice armatura si ottiene:

$$r(\sigma_c = 85; \bar{\sigma}_s = 2200; d'/d = 0.05; n = 15) = 0.270$$

$$\zeta'(\sigma_c = 85; \bar{\sigma}_s = 2200; d'/d = 0.05; n = 15) = 0.878$$

da cui risulta

$$d = r \cdot \sqrt{\frac{M_B}{b}} = 0.270 \cdot \sqrt{\frac{18424}{0.40}} = 58 \text{ cm} \quad h = d + d' = 58 + 3 = 61 \text{ cm}$$

Assumendo per l'altezza della sezione $h = 65 \text{ cm}$ (lievemente superiore al valore ottenuto dal progetto agli s.l. con $\xi = 0.25$) si ottiene la seguente armatura di progetto:

$$A_s = \frac{M}{\zeta \cdot d \cdot \sigma_{sd}} = \frac{1842400}{0.878 \cdot 62 \cdot 2200} = 15.38 \text{ cm}^2$$

La soluzione è sostanzialmente identica a quella ottenuta agli s.l.u.. Tuttavia con il progetto agli s.l.u. sono possibili molte altre soluzioni con altezze variabili tra 51 ed 83 cm, pur con asse neutro in zona duttile ($0.15 \leq \xi \leq 0.35$).

Pressoflessione: abachi per il progetto della sezione rettangolare

Il problema del progetto dell'altezza e dell'armatura può essere condotto in analogia al caso del metodo delle tensioni ammissibili, determinando diagrammi che legano le variabili $1/v_u$ ed e/h , essendo e l'eccentricità fornita dal rapporto M_{uG}/N_u .

$$\psi \cdot \xi + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s}{f_{sd}} + \omega \cdot \frac{\sigma_s}{f_{sd}} = v_u$$

Traslazione

$$\psi \cdot \xi \cdot \left(\frac{1}{2} - \lambda \cdot \xi \right) + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s}{f_{sd}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \delta' \right) - \omega \cdot \frac{\sigma_s}{f_{sd}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \delta' \right) = \mu_{uG}$$

Rotazione intorno al baricentro

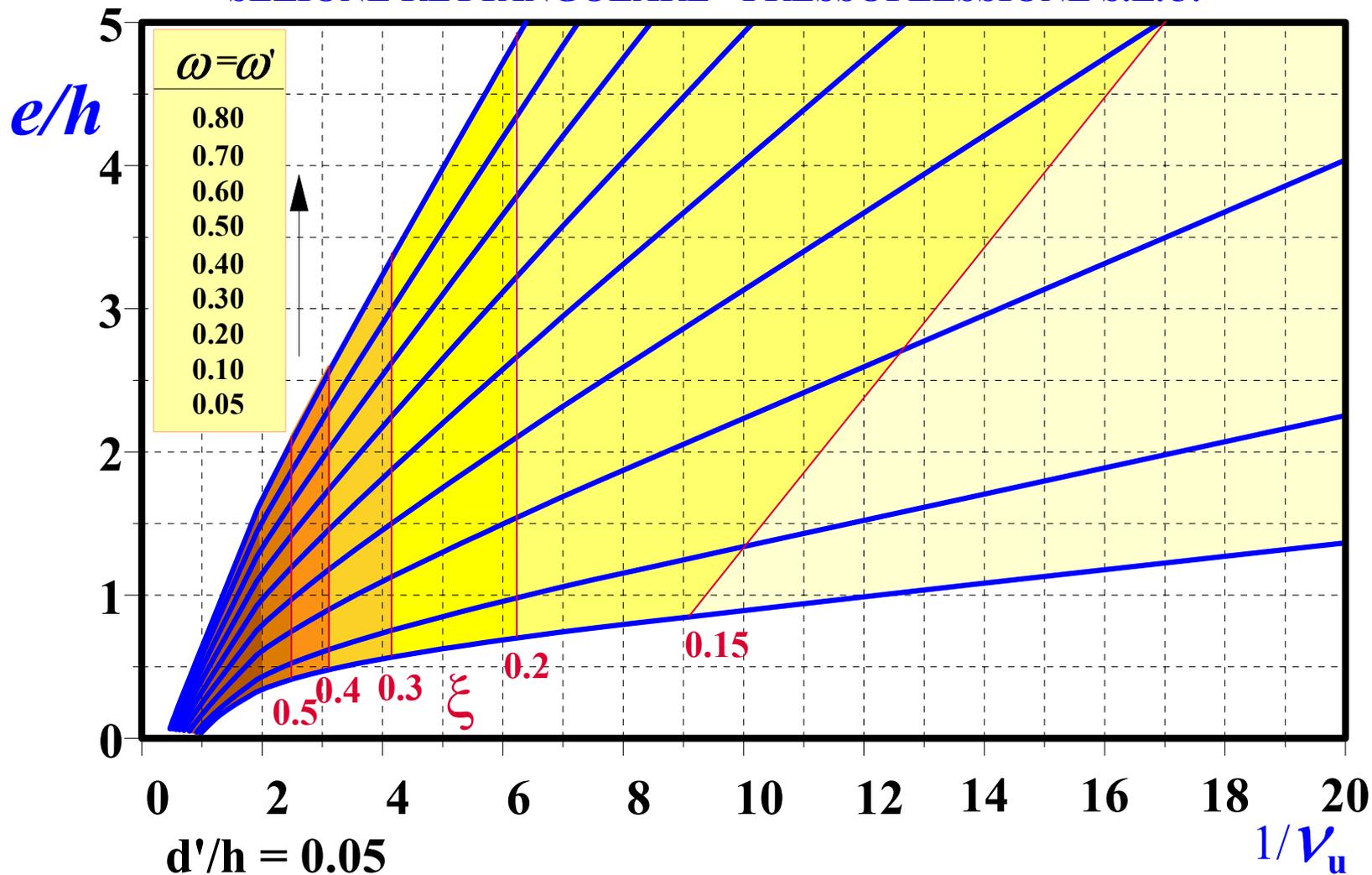
Si ottiene:

$$\frac{1}{v_u} = \frac{1}{\psi \cdot \xi + \omega' \cdot (\sigma'_s/f_{sd}) + \omega \cdot (\sigma_s/f_{sd})}$$

$$\frac{\mu_{uG}}{v_u} = \frac{e}{h} = \frac{\psi \cdot \xi \cdot [(1/2) - \lambda \cdot \xi] + \omega' \cdot (\sigma'_s/f_{sd}) \cdot [(1/2) - \delta'] - \omega \cdot (\sigma_s/f_{sd}) \cdot [(1/2) - \delta']}{\psi \cdot \xi + \omega' \cdot (\sigma'_s/f_{sd}) + \omega \cdot (\sigma_s/f_{sd})}$$

Pressoflessione: abachi per il progetto della sezione rettangolare

SEZIONE RETTANGOLARE - PRESSOFLESSIONE S.L.U.



Pressoflessione: abachi per il progetto della sezione rettangolare

Progetto della sezione (b, h)

Fissata le percentuali delle armature superiore ed inferiore (uguali negli abachi forniti), e note le sollecitazioni, si impone un valore di progetto del carico assiale limite, che dipende essenzialmente dalla duttilità che si intende conferire all'elemento progettato; sulle curve $(1/v_u, e/h)$ relative alle prefissate percentuali ω ed ω' si leggono i valori di $\eta = e/h$ corrispondenti; essendo nota la eccentricità di progetto e , si possono ricavare l'altezza h e la base b della sezione mediante le relazioni:

$$h = \frac{e}{\eta} \quad , \quad b = \frac{N_u}{v_u \cdot h \cdot f_{cd}} \quad A_s = A'_s = \frac{\omega \cdot b \cdot h \cdot f'_{cd}}{f_{sd}}$$

Progetto delle armature

Fissate la geometria della sezione e le caratteristiche dei materiali e note le sollecitazioni, si calcolano preliminarmente i valori adimensionali e/h e v_u ; negli abachi il punto di coordinate $(1/v_u, e/h)$ permette per interpolazione di determinare il valore di progetto delle armature richieste.

Pressoflessione: abachi per il progetto della sezione rettangolare

Verifica della sezione

Note la geometria della sezione, la quantità di armature, le caratteristiche dei materiali e le sollecitazioni, si calcola il valore del parametro adimensionale νu ; assumendo lo stesso come valore ultimo νu , dalla coordinata $1/\nu u$ e per interpolazione tra le curve corrispondenti ai due valori delle percentuali di armatura comprendenti quella effettiva, si determina il valore di e/h e quindi della eccentricità corrispondente al momento ultimo. La verifica pertanto si ottiene controllando il soddisfacimento della relazione:

$$M_d < M_u = N_u \cdot \eta \cdot h = N_u \cdot e$$

Esempio di progetto di sezione rettangolare a pressoflessione

Si progetti agli s.l.u. una sezione rettangolare soggetta in condizioni di esercizio alle seguenti sollecitazioni di calcolo:

$$M_d = 2290500 \text{ kgcm} \quad N_d = 72588 \text{ kg}$$

I materiali da utilizzare sono calcestruzzo di classe $R_{ck} = 250 \text{ kg/cm}^2$ ed acciaio tipo FeB38k.

Per il progetto della sezione mediante gli abachi, si calcola preventivamente l'eccentricità del carico:

$$e_d = \frac{M_d}{N_d} = \frac{2290500}{72588} = 31.55 \text{ cm}$$

Fissando il valore di $\xi=0.4$ (generalmente compreso tra 0.2-0.45 che corrisponde all'incirca alle zone 2"-3), dall'equazione di equilibrio alla traslazione scritta in forma adimensionale, si ottiene un valore di progetto di v_u :

$$\psi \cdot \xi + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s}{f_{sd}} + \omega \cdot \frac{\sigma_s}{f_{sd}} = v_u \quad \Rightarrow \quad \psi \cdot \xi = v_u \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v_u} = \frac{1}{\psi \cdot \xi} = \frac{1}{0.8 \cdot 0.4} = 3.125$$

Fissando il valore di $\omega = \omega' = 0.10$ e $d'/h = 0.10$ dall'abaco si ottiene e/h :

$$\frac{1}{V_u} = 3.125$$



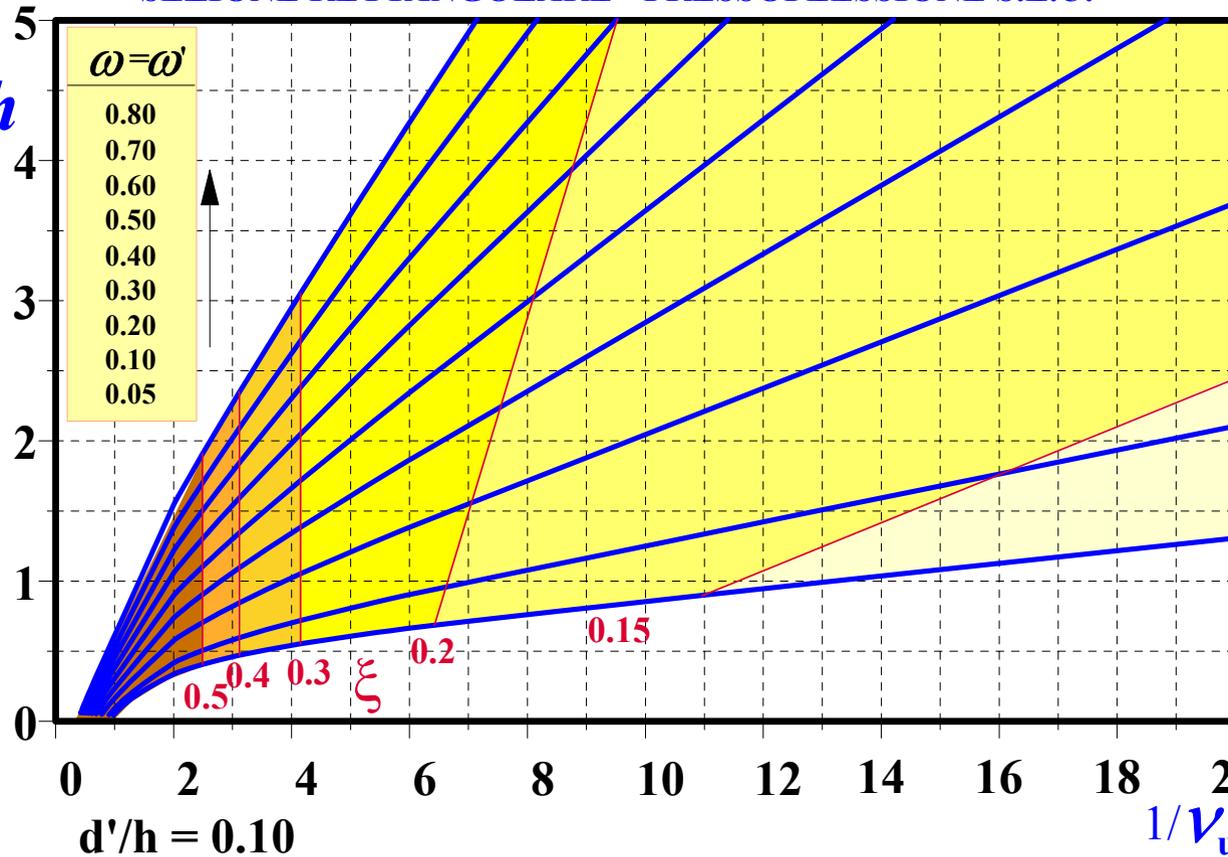
$$\eta = e/h = 0.63$$



$$h = \frac{e_d}{\eta} = \frac{31.55}{0.63} = 50.0$$



SEZIONE RETTANGOLARE - PRESSOFLESSIONE S.L.U.



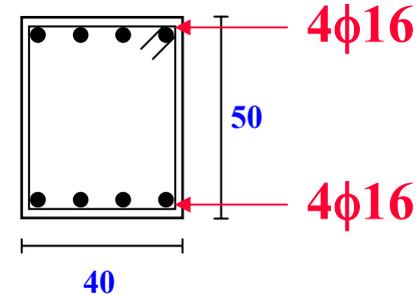
$$b = \frac{N_u}{v_u \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{72588}{0.32 \cdot 50 \cdot 110} = 41.2 \text{ cm}$$

$$A_s = A'_s = \frac{\omega \cdot b \cdot h \cdot f'_{cd}}{f_{sd}} = \frac{0.10 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 110}{3304} = 6.65 \text{ cm}^2$$

Esempio di verifica di sezione rettangolare a pressoflessione

Verifica agli s.l.u. di una sezione rettangolare soggetta in condizioni di esercizio alle seguenti sollecitazioni di calcolo:

$$N_d = 72588 \text{ kg} \quad M_d = 2290500 \text{ kgcm}$$



I materiali utilizzati sono calcestruzzo di classe $R_{ck} = 250 \text{ kg/cm}^2$ ed acciaio tipo FeB38k.

Le resistenze di calcolo del calcestruzzo di classe $R_{ck} = 250 \text{ kg/cm}^2$ e per l'acciaio FeB38k risultano:

$$f'_{cd} = \frac{0.85 \cdot 0.83 \cdot 250}{1.6} = 110 \text{ kg/cm}^2 \quad f_{sd} = 3800/1.15 = 3304 \text{ kg/cm}^2$$

A VERIFICA MEDIANTE GLI ABACHI

Per effettuare la verifica mediante l'abaco occorre preventivamente calcolare $1/\nu_u$ e $\omega = \omega'$:

$$\nu_u = \frac{N_u}{b \cdot h \cdot f'_{cd}} = \frac{72588}{40 \cdot 50 \cdot 110} = 0.33 \quad \Rightarrow \quad 1/\nu_u = \frac{1}{0.33} = 3.03 \quad \omega = \omega' = \frac{8.04 \cdot 3304}{40 \cdot 50 \cdot 110} = 0.12$$

Dall'abaco si legge:

$$\eta = e/h = \frac{M_u}{N_u h} = 0.65 \Rightarrow M_u = N_u \cdot \eta \cdot h = 72588 \cdot 0.65 \cdot 50 = 2359110$$

La verifica è soddisfatta risultando:

$$M_d = 2290500 < M_u = 2359110$$

B VERIFICA ANALITICA

Per la determinazione della posizione dell'asse neutro, si supponga inizialmente di essere nella zona in cui le armature sono entrambe snervate. L'equazione di equilibrio alla traslazione diventa

$$0.8 \cdot b \cdot y_c \cdot f'_{cd} + A'_s \cdot f_{sd} - A_s \cdot f_{sd} = N_u = 72588$$

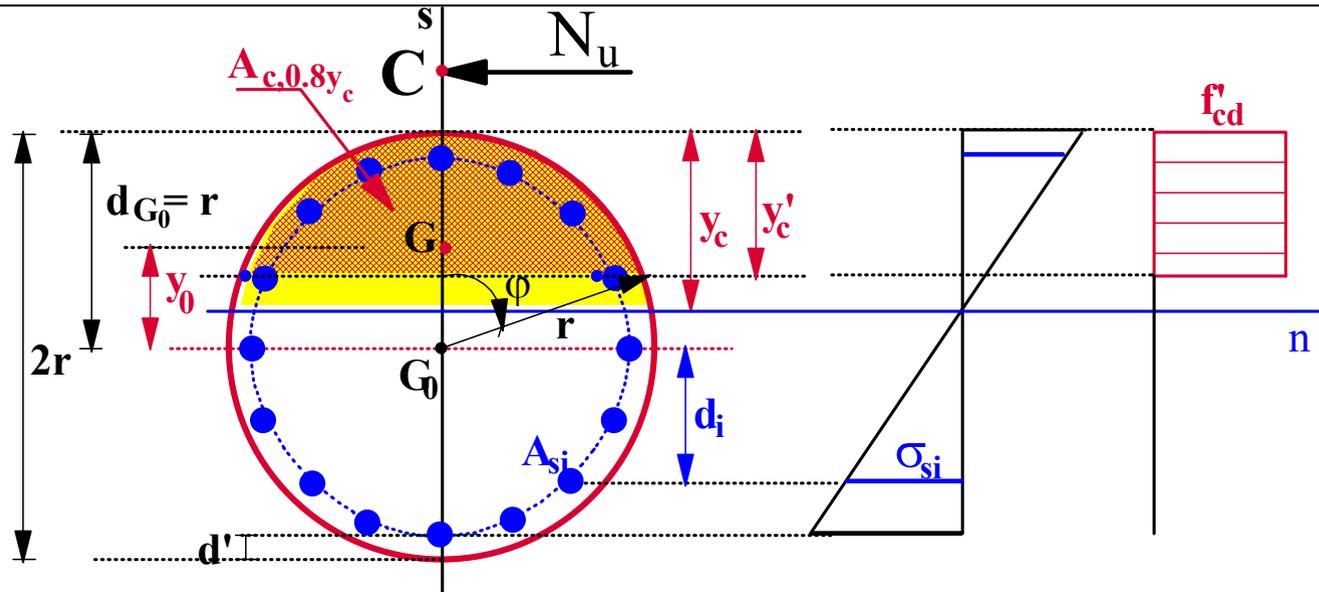
cui segue:

$$y_c = \frac{N_u}{0.8 \cdot b \cdot f'_{cd}} = \frac{72588}{0.8 \cdot 40 \cdot 110} = 20.62 \text{ cm}$$

Essendo l'asse neutro nella zona 3 ($11.75 \leq 20.62 \leq 32.42$) segue:

$$M_u = 0.8 \cdot 20.62 \cdot 40 \cdot 110 \cdot (25 - 0.4 \cdot 20.62) + 8.04 \cdot 3304 \cdot (25 - 3) \cdot 2 = \\ = 2384723 \text{ kgcm (poco diverso da 2359110 per via grafica)}$$

La sezione circolare: verifica e progetto



Se si adotta per la valutazione del contributo statico del calcestruzzo l'ipotesi semplificativa dello Stress-Block, il diagramma delle deformazioni al variare della posizione dell'asse neutro serve esclusivamente a valutare il contributo delle barre di armatura, in quanto quello del calcestruzzo è definito dal prodotto dell'area A'_c al di sopra della corda posta a $0.8 y_c$ dal bordo compresso per la tensione di progetto $f'_{cd} = 0.80 \cdot f_{cd}$

$$f'_{cd} = \alpha \cdot f_{cd} = \alpha \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \alpha \frac{0.83 \cdot R_{ck}}{1.5}$$

$$\alpha = 0.85$$

$\alpha = 0.80$ nel caso di STRESS BLOCK con sezione di larghezza crescente dalla fibra maggiormente compressa verso l'asse neutro

La sezione circolare: verifica e progetto

Determinazione della posizione dell'asse neutro

$$F(y_c) = A'_c \cdot f'_{cd} + \sum_i A_{si} \cdot \sigma_{si} - N_u = 0 \quad [f'_{cd} = 0.80 \cdot f_{cd}]$$

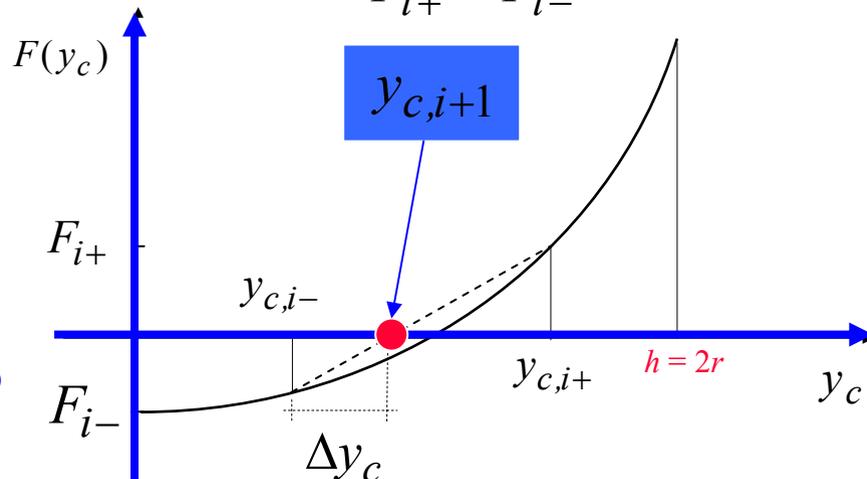
Da un punto di vista operativo, si osserva che la $F(y_c)$ è una funzione crescente della posizione dell'asse neutro y_c con valore negativo per $y_c = 0$ e positivo per $y_c = \infty$, se N_u è minore del carico massimo sopportabile dalla sezione con eccentricità nulla. Pertanto, individuate due posizioni dell'asse neutro cui corrispondono valori di segno opposto della $F(y_c)$, la posizione dell'asse neutro in una iterazione successiva si ottiene costruendo una curva di errore che consente una rapida convergenza verso la soluzione esatta.

$$y_{c,i+1} = y_{c,i-} - \frac{y_{c,i+} - y_{c,i-}}{F_{i+} - F_{i-}} \cdot F_{i-} = y_{c,i+} - \frac{y_{c,i+} - y_{c,i-}}{F_{i+} - F_{i-}} \cdot F_{i+}$$

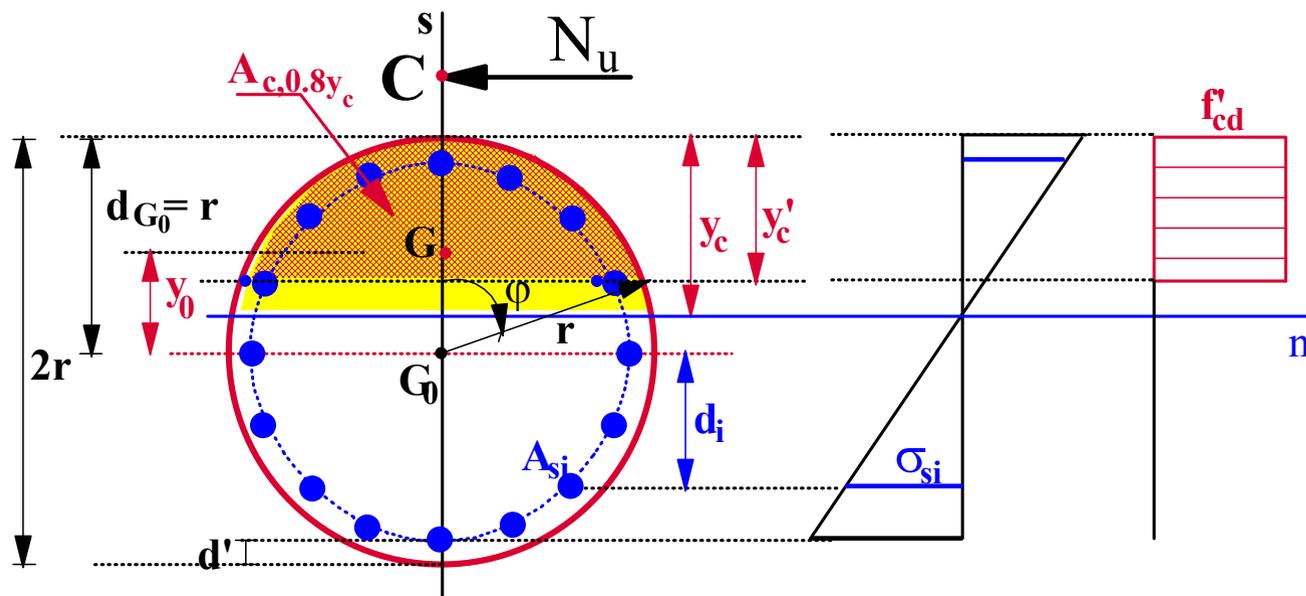
L'arresto del procedimento iterativo è regolato dalla disequazione

$$\left| \frac{F(y_c)}{\pi \cdot r^2 \cdot f'_{cd} + A_s \cdot f_{sd}} \right| < \varepsilon_F$$

con ε_F errore ammesso (per esempio $\varepsilon_F = 1/1000$).



La sezione circolare: verifica e progetto



Determinazione del momento ultimo

$$M_{uG} = M_{cG} + \sum_i A_{si} \cdot \sigma_{si} \cdot d_i$$

dove il contributo del calcestruzzo si ottiene dalla seguente relazione:

$$M_{cG} = N_c \cdot y_0 = N_c \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{r \cdot \text{sen}^3 \varphi}{2\varphi - \text{sen} 2\varphi} \right)$$

La sezione circolare: progetto con abachi

Adimensionalizzazione

$$v_u = \frac{N_u}{\pi \cdot r^2 \cdot f'_{cd}} \quad \mu_{u,G} = \frac{M_{u,G}}{2 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot f'_{cd}} \quad \omega = \frac{A_s \cdot f_{sd}}{\pi \cdot r^2 \cdot f'_{cd}}$$

$$\xi = y_c / (2r) \quad ; \quad \delta' = d' / (2r) \quad ; \quad d/h = \frac{2r - d'}{2r} = 1 - \delta'$$

Ad esempio, introducendo le quantità adimensionali nell'equazione di equilibrio alla traslazione:

$$\frac{A'_c \cdot f'_{cd}}{\pi \cdot r^2 \cdot f'_{cd}} + \sum_{i=1}^n \frac{A_{si} \cdot \sigma_{si}}{\pi \cdot r^2 \cdot f'_{cd}} = \frac{N_u}{\pi \cdot r^2 \cdot f'_{cd}} = v_u$$

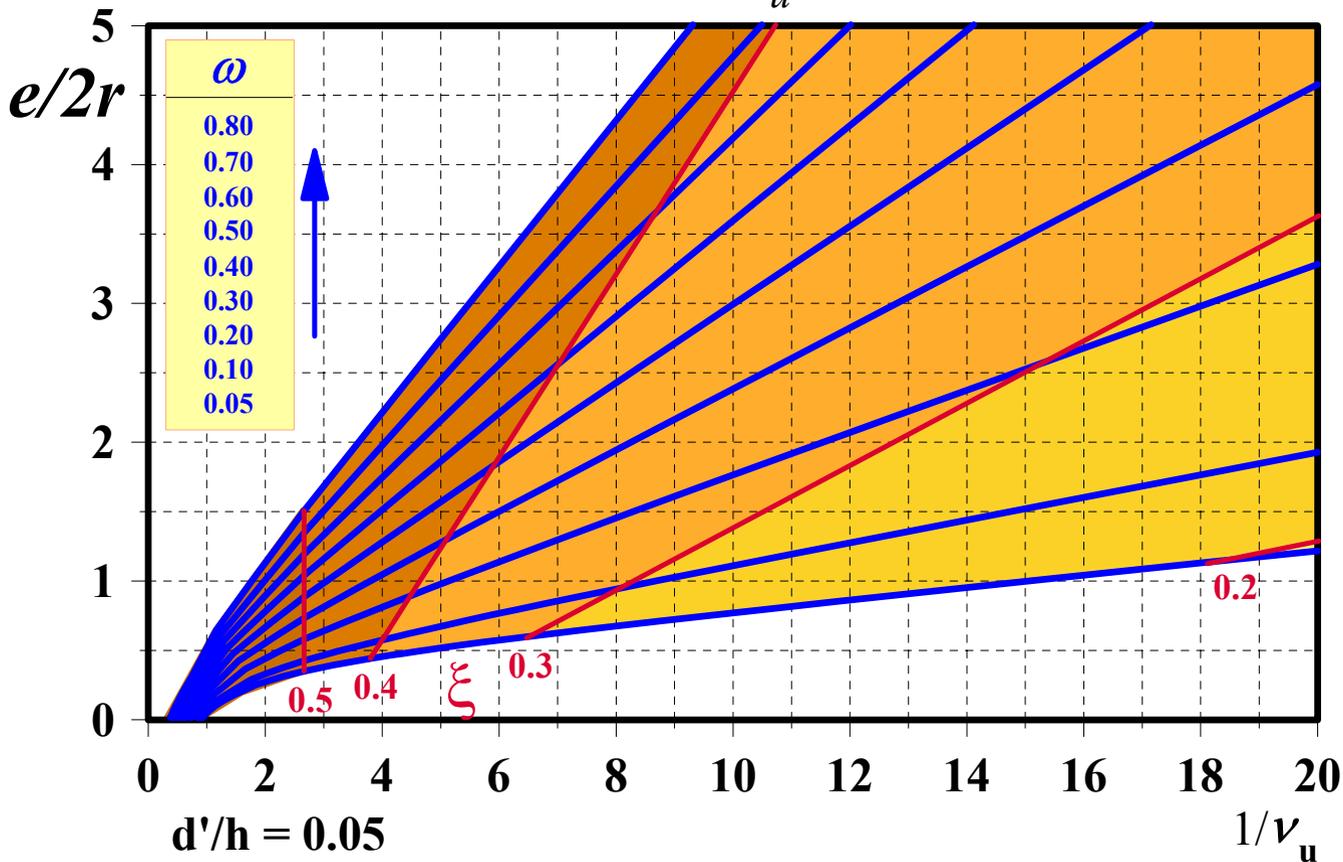
Le equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione diventano:

$$\frac{A'_c}{\pi \cdot r^2} + \frac{\omega}{n_s} \cdot \sum_i \frac{\sigma_{si}}{f_{sd}} = v_u$$
$$\frac{M_{uG}}{2 \pi \cdot r^3 \cdot f'_{cd}} = \frac{M_{cG}}{2 \pi \cdot r^3 \cdot f'_{cd}} + \frac{\omega}{n_s} \sum_i \frac{\sigma_{si} d_i}{2 \cdot \pi \cdot f_{sd}} = \mu_{uG}$$

La sezione circolare: progetto con abachi

Il problema del progetto dell'altezza e dell'armatura può essere condotto in analogia al caso del metodo delle tensioni ammissibili, determinando diagrammi che legano le variabili $1/v_u$ ed $e/(2r)$, essendo e l'eccentricità fornita dal rapporto M_{uG}/N_u .

$$\frac{e}{2r} = \frac{M_{uG}/N_u}{2r} = \frac{\mu_{uG}}{v_u}$$



Pressoflessione: abachi per il progetto della sezione circolare

Progetto della sezione (r)

Fissata la percentuale geometrica complessiva di armatura e note le sollecitazioni, si impone un valore di progetto del carico assiale limite, che dipende essenzialmente dalla duttilità che si intende conferire all'elemento progettato; sulla curva $(1/v_u, e/2r)$ relativa alla prefissata percentuale ω si legge il valore di $\eta = e/2r$ corrispondente; essendo nota la eccentricità di progetto e , si può ricavare il raggio r della sezione, nonché l'armatura, mediante le relazioni:

$$r = \frac{e}{2 \cdot \eta} \quad A_s = \frac{\omega \cdot \pi \cdot r^2 \cdot f'_{cd}}{f_{sd}}$$

Progetto delle armature

Fissate la geometria della sezione e le caratteristiche dei materiali e note le sollecitazioni, si calcolano preliminarmente i valori adimensionali $e/2r$ e v_u ; negli abachi il punto di coordinate $(1/v_u, e/2r)$ permette per interpolazione di determinare il valore di progetto delle armature richieste.

Pressoflessione: abachi per il progetto della sezione circolare

Verifica della sezione

Note la geometria della sezione, la quantità di armature, le caratteristiche dei materiali e le sollecitazioni, si calcola il valore del parametro adimensionale νu ; assumendo lo stesso come valore ultimo νu , dalla coordinata $1/\nu u$ e per interpolazione tra le curve corrispondenti ai due valori delle percentuali di armatura comprendenti quella effettiva, si determina il valore di $e/2r$ e quindi della eccentricità corrispondente al momento ultimo. La verifica pertanto si ottiene controllando il soddisfacimento della relazione:

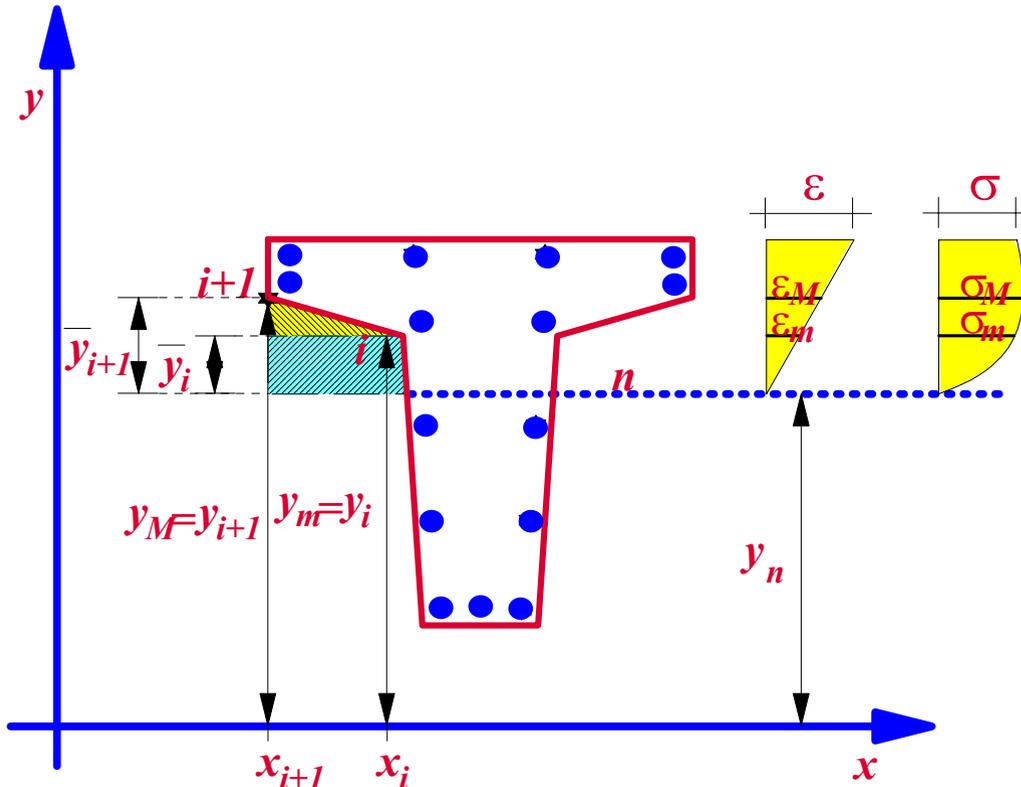
$$M_d < M_u = N_u \cdot \eta \cdot 2r = N_u \cdot e$$

La sezione generica: presso-flessione retta

A Metodo generale di tipo numerico

B Verifica con diagramma Stress-block

Metodo generale



Determinazione dell'asse neutro

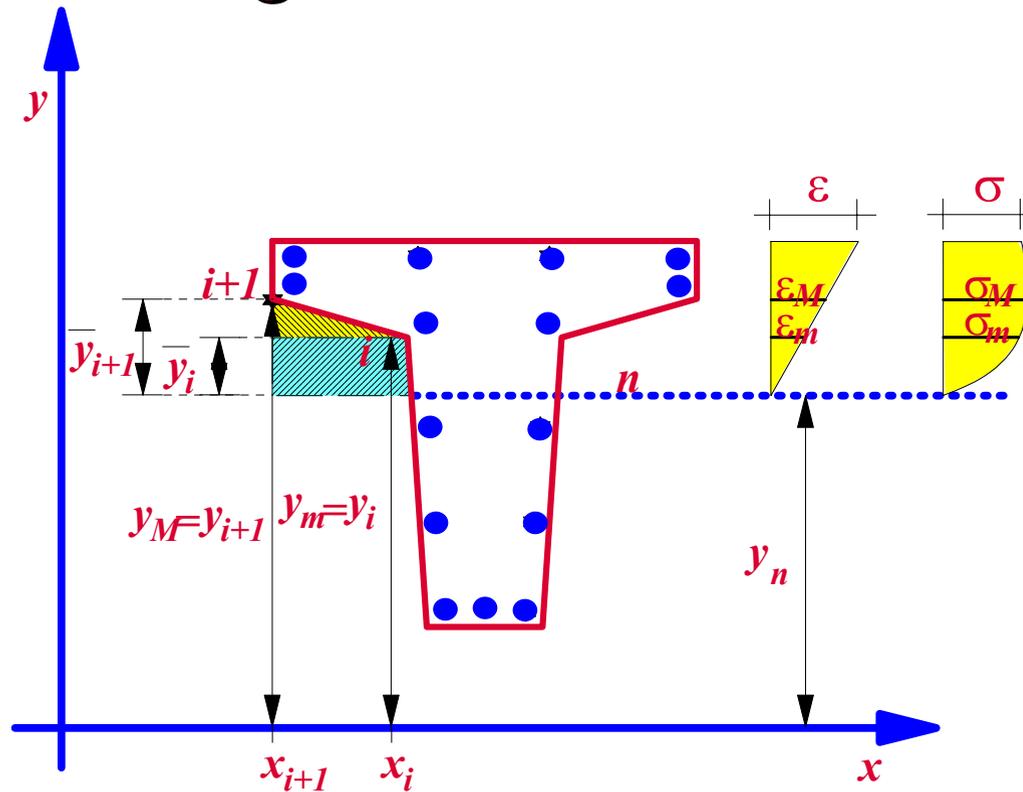
$$f(y_n) = (N_c + N_s) - N_u$$

$$N_s = \sum_j (A_{s,j} \cdot \sigma_{s,j})$$

$$N_{c,i} = \int_0^{\bar{y}_M} \sigma(\bar{y}) \cdot b(\bar{y}) d\bar{y}$$

La sezione generica: presso-flessione retta

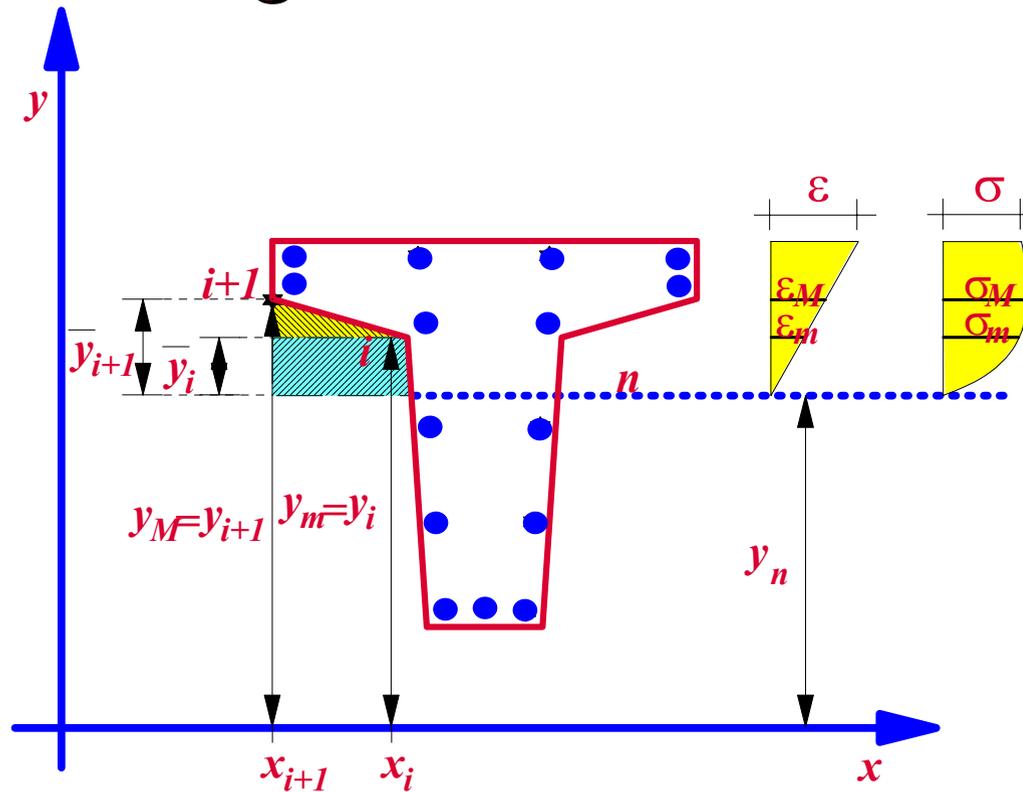
Metodo generale numerico



$$N_s = \sum_j (A_{s,j} \cdot \sigma_{s,j}) \begin{cases} \sigma_{s,j} = f_{sd} & \text{per } \epsilon_{s,j} \geq \epsilon_{os} \\ \sigma_{s,j} = -f_{sd} & \text{per } \epsilon_{s,j} \leq -\epsilon_{os} \\ \sigma_{s,j} = E_s \cdot \epsilon_{s,j} & \text{per } |\epsilon_{s,j}| < \epsilon_{os} \end{cases}$$

La sezione generica: presso-flessione retta

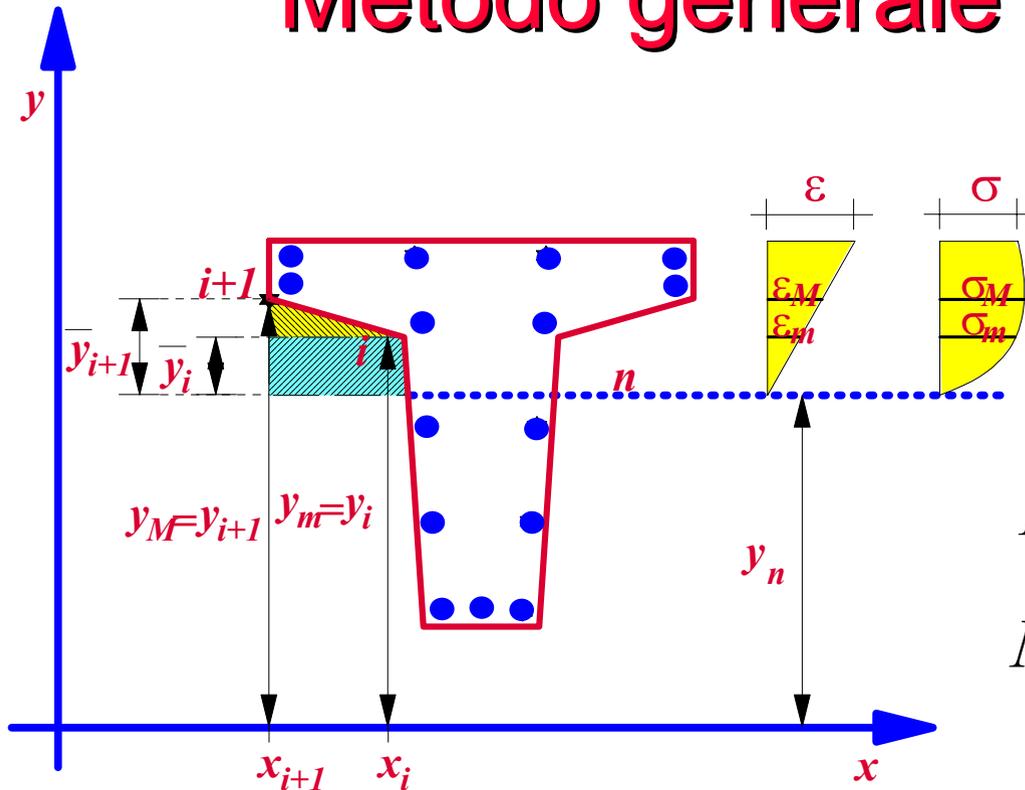
Metodo generale numerico



$$N_c = \sum_i (N_{cr,i} + N_{ct,i}) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_{cr,i} = (x_{i+1} - x_i) \cdot \int_0^{\bar{y}_m} \sigma(\bar{y}) d\bar{y} \\ N_{ct,i} = \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\bar{y}_M - \bar{y}_m} \right) \cdot \int_{\bar{y}_m}^{\bar{y}_M} \sigma(\bar{y}) \cdot (\bar{y}_M - \bar{y}) d\bar{y} \end{array} \right.$$

La sezione generica: presso-flessione retta

Metodo generale numerico



Determinazione del momento ultimo

$$M_u = M_c + M_s$$

$$M_s = \sum_j (A_{s,j} \cdot \sigma_{s,j} \cdot y_{s,j})$$

$$M_{c,i} = \int_0^{\bar{y}_M} \sigma(\bar{y}) \cdot b(\bar{y}) \cdot \bar{y} \, d\bar{y}$$

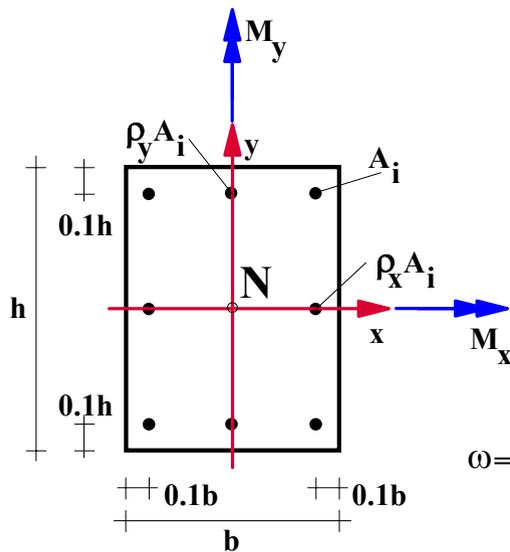
$$M_c = \sum_i (M_{cr,i} + M_{ct,i}) \left[\begin{array}{l} M_{cr,i} = (x_{i+1} - x_i) \cdot \int_0^{\bar{y}_i} \sigma(\bar{y}) \cdot \bar{y} \, d\bar{y} \\ M_{ct,i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\bar{y}_M - \bar{y}_m} \cdot \int_{\bar{y}_m}^{\bar{y}_M} \sigma(\bar{y}) \cdot (\bar{y}_M - \bar{y}) \cdot \bar{y} \, d\bar{y} \end{array} \right.$$

$$M_{u,G} = M_u + N_u \cdot (y_n - y_G)$$

Sezione generica: presso-tenso flessione deviata

Nel caso della pressoflessione deviata sono incogniti sia la posizione che l'inclinazione dell'asse neutro. Come nel caso del metodo di verifica alle tensioni ammissibili è possibile pervenire alla soluzione del problema della verifica individuando la sezione reagente per successive approssimazioni

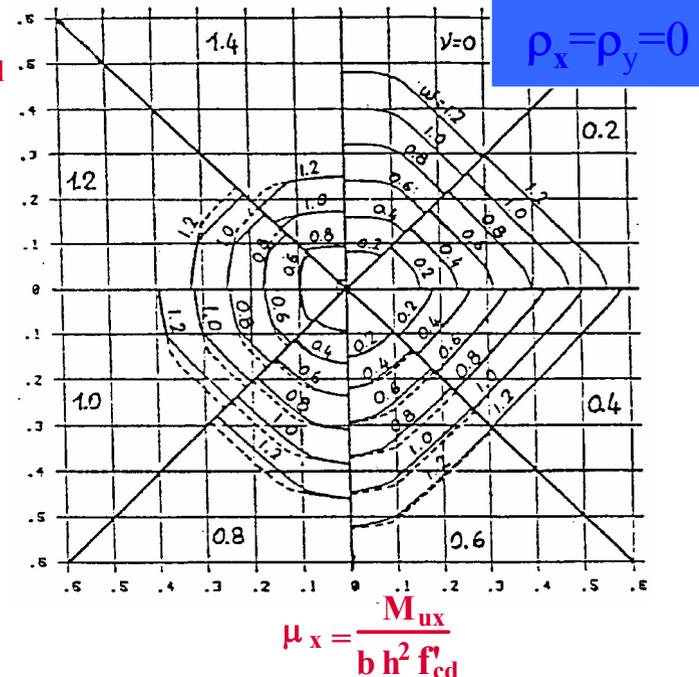
Domini di resistenza per sezioni rettangolari



- Caso A: $\rho_x = \rho_y = 0$
 Caso B: $\rho_x = \rho_y = 0.5$
 Caso C: $\rho_x = \rho_y = 1.0$
 Caso D: $\rho_x = 0.5, \rho_y = 0$
 Caso E: $\rho_x = 1.0, \rho_y = 0$
 Caso F: $\rho_x = 1.0, \rho_y = 0.5$

$$\omega = \frac{(4A_i + 2\rho_x A_i + 2\rho_y A_i) \cdot f_{yd}}{bh f_{cd}}$$

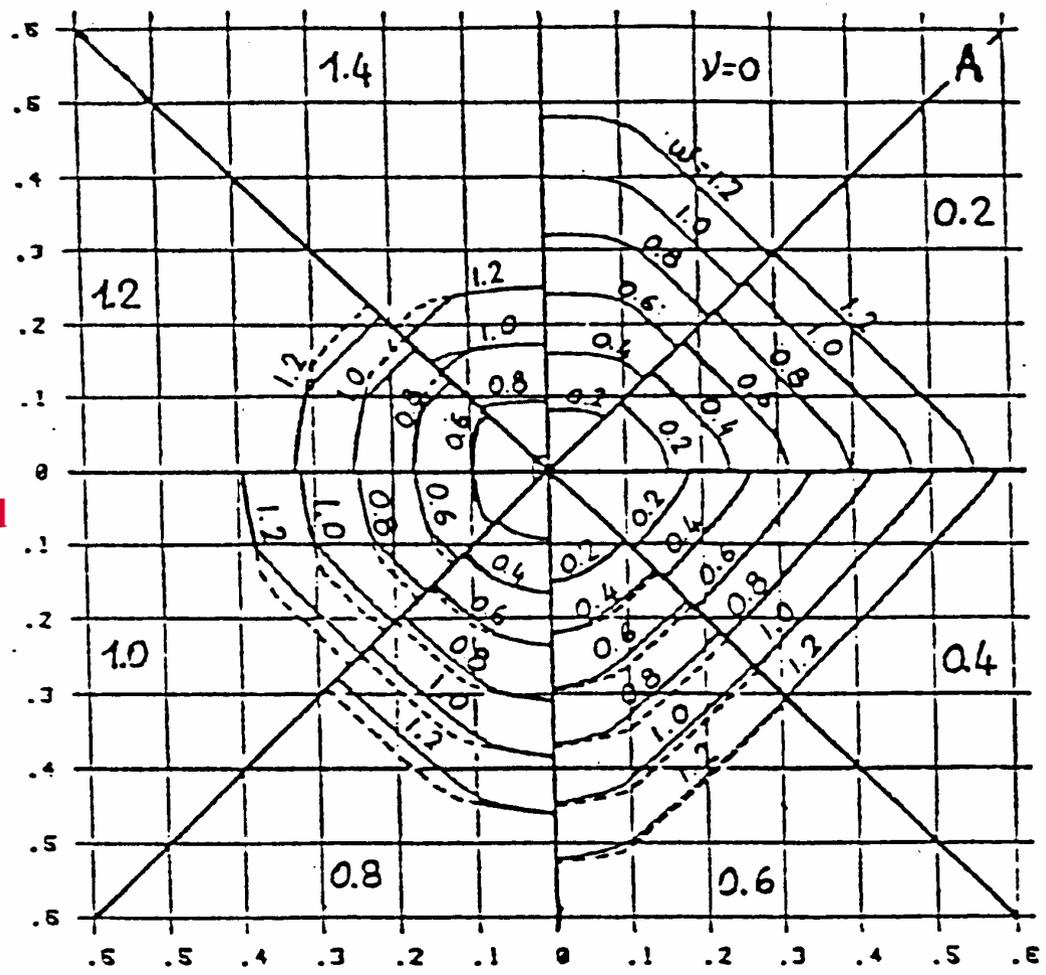
$$\mu_y = \frac{M_{uy}}{h b^2 f_{cd}}$$



Sezione rettangolare: domini di resistenza per presso-tenso flessione deviata

$$\rho_x = \rho_y = 0$$

$$\mu_y = \frac{M_{uy}}{h b^2 f'_{cd}}$$



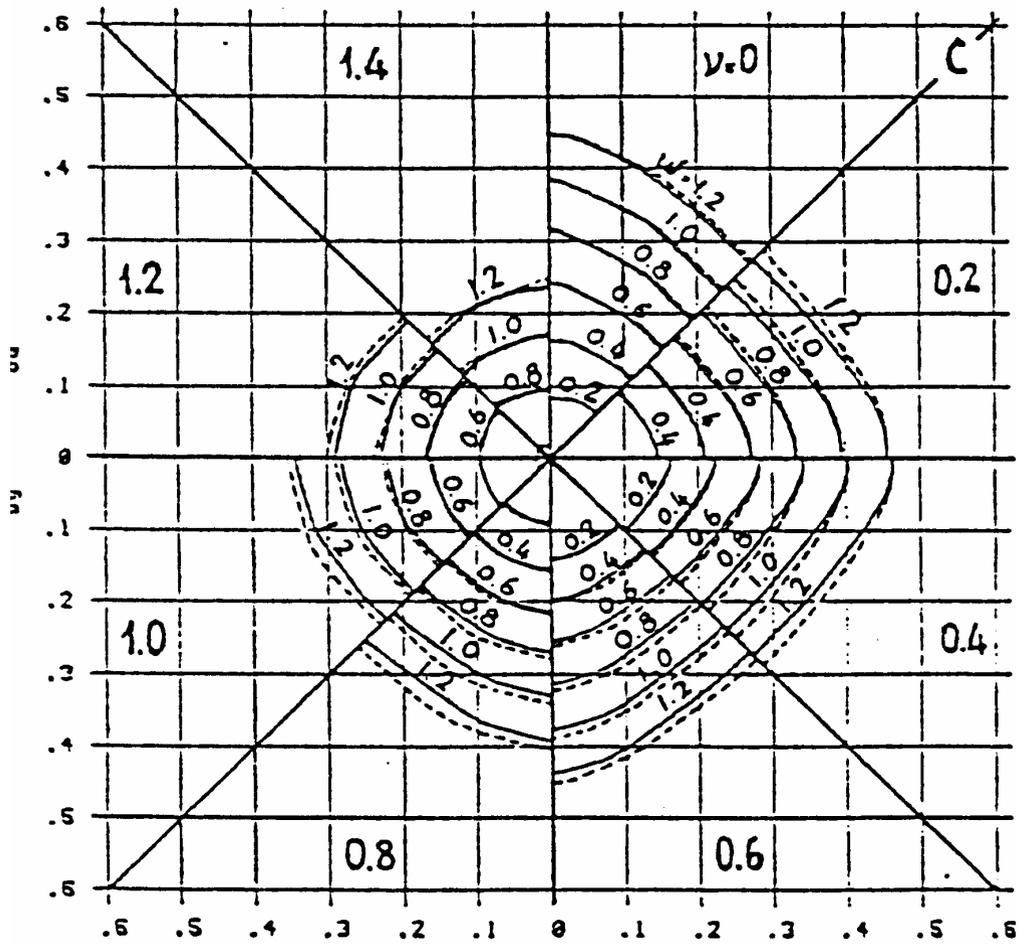
————— $R_{ck} = 250 \text{ kg/cm}^2 - \text{FeB44k}$
 $R_{ck} = 350 \text{ kg/cm}^2 - \text{FeB38k}$

$$\mu_x = \frac{M_{ux}}{b h^2 f'_{cd}}$$

Sezione rettangolare: domini di resistenza per presso-tenso flessione deviata

$$\rho_x = \rho_y = 1$$

$$\mu_y = \frac{M_{uy}}{h b^2 f'_{cd}}$$



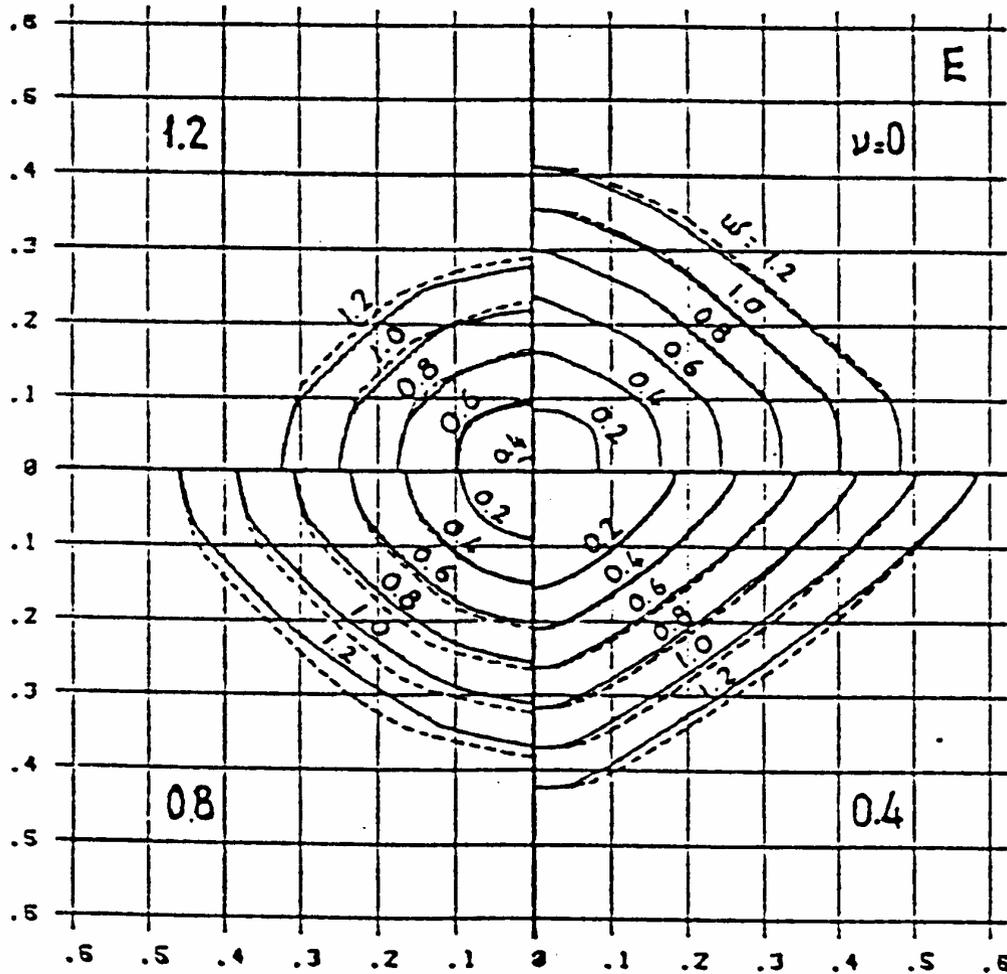
————— $R_{ck} = 250 \text{ kg/cm}^2 - \text{FeB44k}$

..... $R_{ck} = 350 \text{ kg/cm}^2 - \text{FeB38k}$

$$\mu_x = \frac{M_{ux}}{b h^2 f'_{cd}}$$

Sezione rettangolare: domini di resistenza per presso-tenso flessione deviata

$$\mu_y = \frac{M_{uy}}{h b^2 f'_{cd}}$$



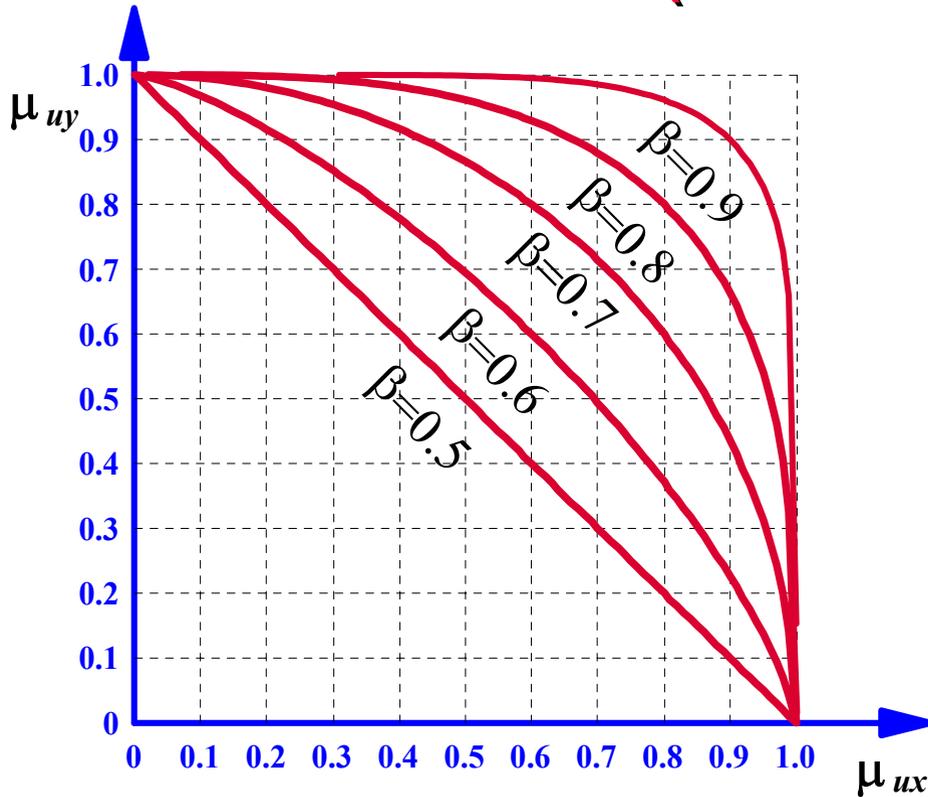
$\rho_x = 1$
 $\rho_y = 0$

————— $R_{ck} = 250 \text{ kg/cm}^2\text{-FeB44k:}$

..... $R_{ck} = 350 \text{ kg/cm}^2\text{-FeB38k:}$

$$\mu_x = \frac{M_{ux}}{b h^2 f'_{cd}}$$

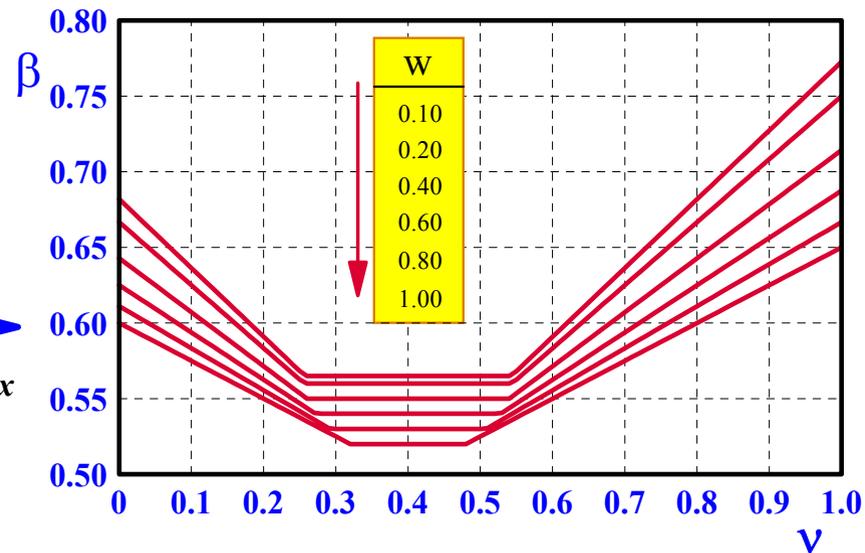
Sezione rettangolare: presso-tenso flessione deviata (soluzione approssimata)



$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{ux0}} \right)^\alpha + \left(\frac{M_{uy}}{M_{uy0}} \right)^\alpha = 1$$

$$\alpha = \log(0.5) / \log(\beta)$$

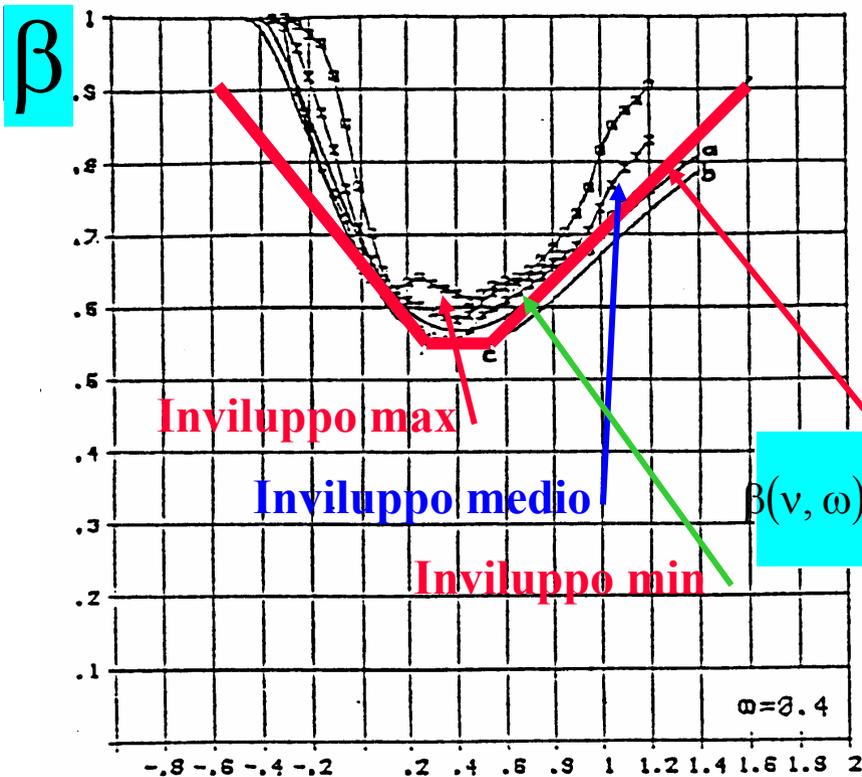
ω = percentuale meccanica di armatura compressiva della sezione



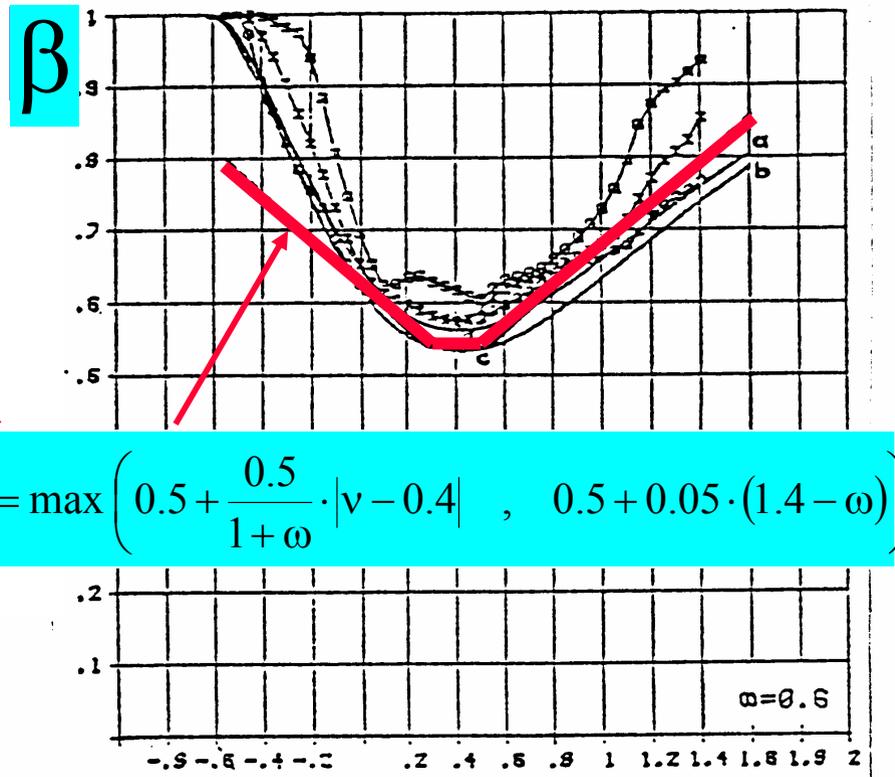
$$\beta(\nu, \omega) = \max \left(0.5 + \frac{0.5}{1 + \omega} \cdot |\nu - 0.4|, 0.5 + 0.05 \cdot (1.4 - \omega) \right)$$

Sezione rettangolare: presso-tenso flessione deviata (soluzione approssimata)

Confronto analisi parametrica-espressione approssimata



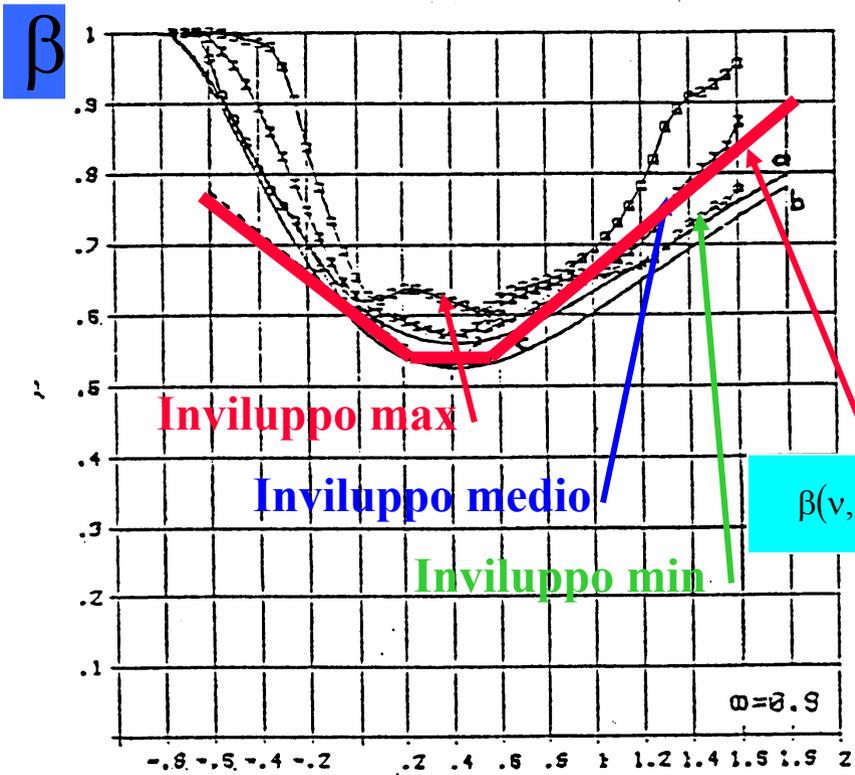
$$v_u = \frac{N_u}{b \cdot h \cdot f'_{cd}}$$



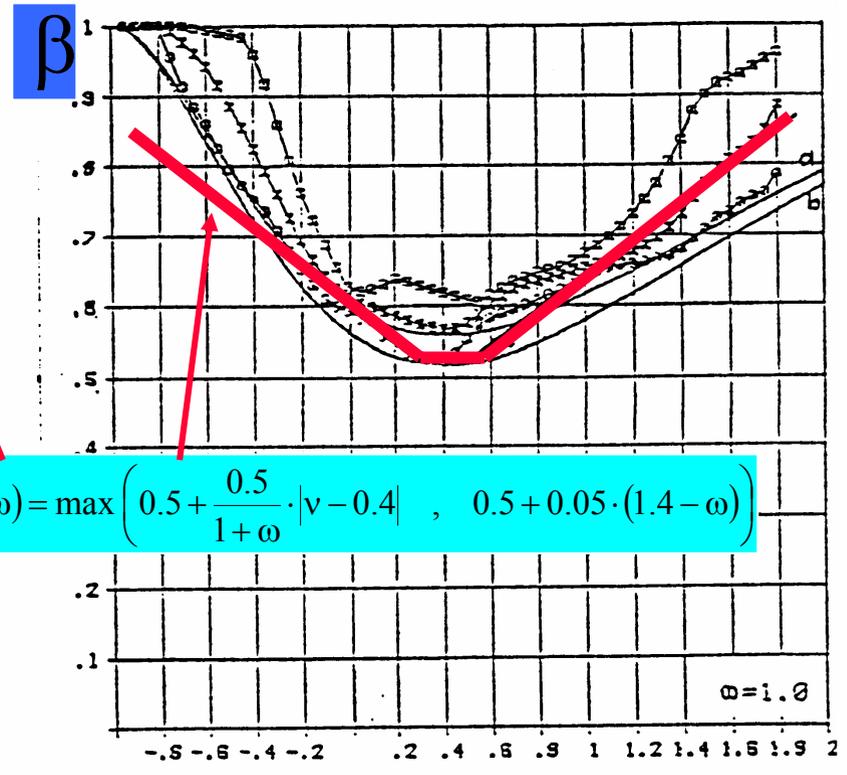
$$v_u = \frac{N_u}{b \cdot h \cdot f'_{cd}}$$

Sezione rettangolare: presso-tenso flessione deviata (soluzione approssimata)

Confronto analisi parametrica-espressione approssimata



$$v_u = \frac{N_u}{b \cdot h \cdot f'_{cd}}$$



$$v_u = \frac{N_u}{b \cdot h \cdot f'_{cd}}$$

Sezione rettangolare: presso-tenso flessione deviata (soluzione approssimata)

Cls: $R_{ck} = 250 \text{ kg/cm}^2$

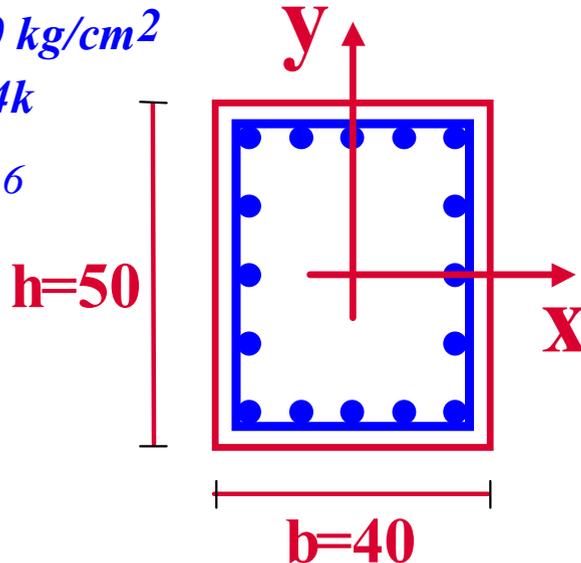
acciaio FeB44k

armature 16 $\phi 16$

$N_d = 45000 \text{ kg}$

$e_x = 15 \text{ cm}$

$e_y = 19 \text{ cm}$



$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{uxo}} \right)^\alpha + \left(\frac{M_{uy}}{M_{uyo}} \right)^\alpha = 1$$

$$\alpha = \log(0.5) / \log(\beta)$$

Resistenze di calcolo del calcestruzzo e dell'acciaio:

$$f'_{cd} = 0.85 \cdot f_{cd} = 0.85 \cdot \frac{0.83 \cdot R_{ck}}{1.6} = 110 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{sd} = \frac{R_{ak}}{\gamma_s} = \frac{4400}{1.15} = 3826 \text{ kg/cm}^2$$

Calcolo dello sforzo normale ultimo adimensionale v :

$$v = \frac{N_u}{b \cdot h \cdot f'_{cd}} = \frac{45000}{40 \cdot 50 \cdot 110} = 0.20$$

Determinazione di M_{uxo} :

Il carico adimensionale vale

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{0.20} = 5$$

La percentuale meccanica di armatura disposta in direzione x ed il copriferro, risultano:

$$\omega_x = \omega'_x = \frac{A_s \cdot f_{sd}}{b \cdot h \cdot f'_{cd}} = \frac{10.05 \cdot 3826}{40 \cdot 50 \cdot 110} = 0.17 \quad \delta_x = \frac{d'}{h} = \frac{3}{50} = 0.06$$

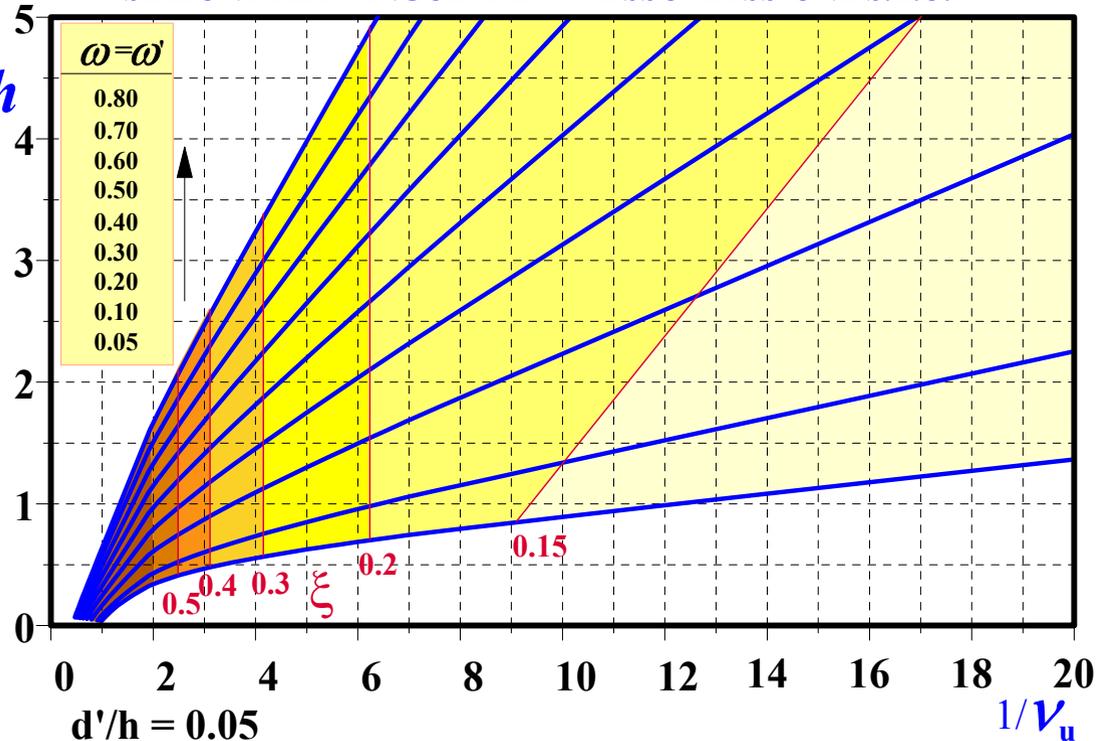


$$\eta_y = e_y / h = 1.15 \quad e/h$$



$$\begin{aligned} M_{uxo} &= N_u \cdot \eta_y \cdot h = \\ &= 45000 \cdot 1.15 \cdot 50 = \\ &= 25875 \text{ kgm} \end{aligned}$$

SEZIONE RETTANGOLARE - PRESSOFLESSIONE S.L.U.



Determinazione di M_{uy0} :

Il carico adimensionale vale

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{0.20} = 5$$

La percentuale meccanica di armatura disposta in direzione x ed il copriferro, risultano:

$$\omega_x = \omega'_x = \frac{A_s \cdot f_{sd}}{b \cdot h \cdot f'_{cd}} = \frac{10.05 \cdot 3826}{40 \cdot 50 \cdot 110} = 0.17 \quad \delta_y = \frac{d'}{h} = \frac{3}{40} = 0.075$$

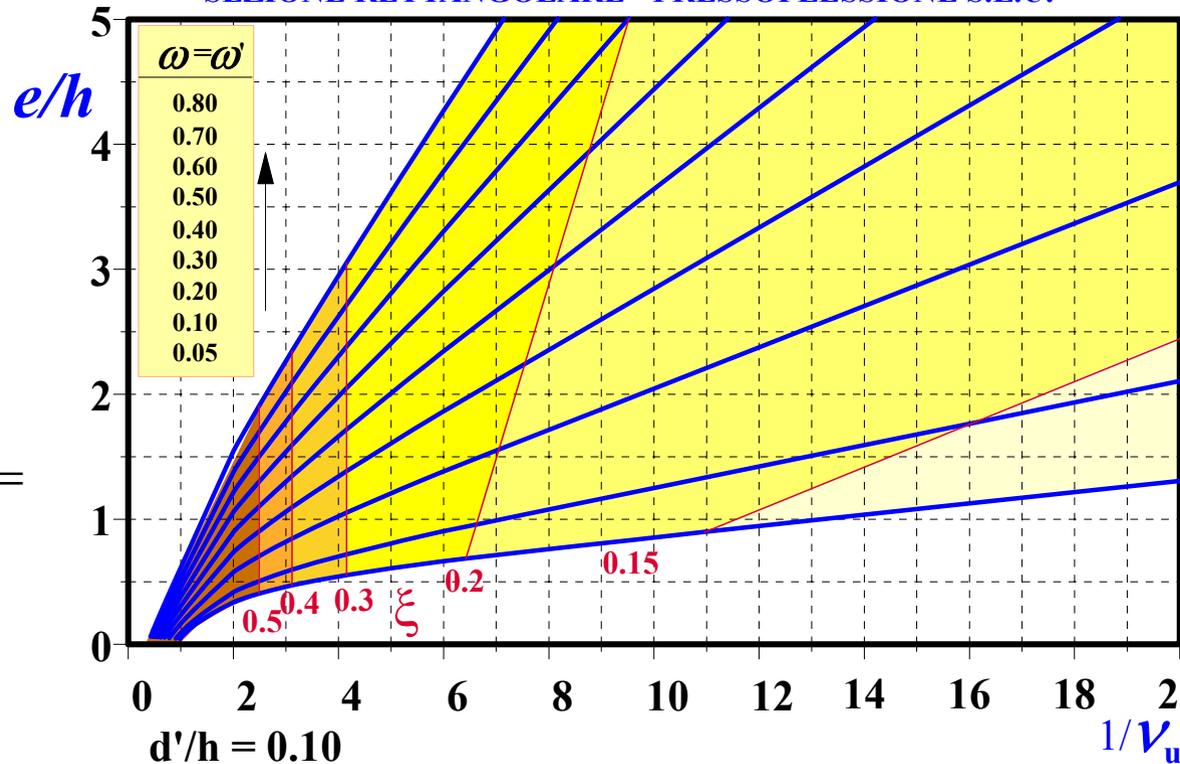


$$\eta_x = e_x / b = 1.05$$



$$\begin{aligned} M_{uy0} &= N_u \cdot \eta_x \cdot b = \\ &= 45000 \cdot 1.05 \cdot 40 = \\ &= 18900 \text{ kgm} \end{aligned}$$

SEZIONE RETTANGOLARE - PRESSOFLESSIONE S.L.U.



Calcolo dei coefficienti β e α :

$$\omega = \frac{A_{s,tot} \cdot f_{sd}}{b \cdot h \cdot f'_{cd}} = \frac{16 \cdot 2.01 \cdot 3826}{40 \cdot 50 \cdot 110} = 0.56$$

$$\beta(v, \omega) = \max \left(0.5 + \frac{0.5}{1 + \omega} \cdot |v - 0.4|, \quad 0.5 + 0.05 \cdot (1.4 - \omega) \right) =$$
$$= \max \left(0.5 + \frac{0.5}{1 + 0.56} \cdot |0.56 - 0.4| = 0.55, \quad 0.5 + 0.05 \cdot (1.4 - 0.56) = 0.54 \right) = 0.55$$

$$\alpha = \frac{\log(0.5)}{\log(\beta)} = \frac{\log(0.5)}{\log(0.55)} = 1.16$$

Domini di resistenza approssimato e verifica a pressoflessione deviata:

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{uxo}} \right)^\alpha + \left(\frac{M_{uy}}{M_{uyo}} \right)^\alpha = \left(\frac{45000 \cdot 0.19}{25875} \right)^{1.16} + \left(\frac{45000 \cdot 0.15}{18900} \right)^{1.16} = 0.58 < 1$$

Relazione costitutiva parabola-lineare

Indicating by $\bar{\varepsilon}$ the following ratio:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}}$$

the following two branches of the relationship are defined:

$$\frac{f_c}{f_{c0}} = a \cdot \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^2; \quad \text{for } \bar{\varepsilon} \in (0,1)$$

$$\frac{f_c}{f_{c0}} = 1 + b \cdot \bar{\varepsilon}; \quad \text{for } \bar{\varepsilon} > 1$$

for $\bar{\varepsilon} \in (0,1)$

for $\bar{\varepsilon} > 1$

where:

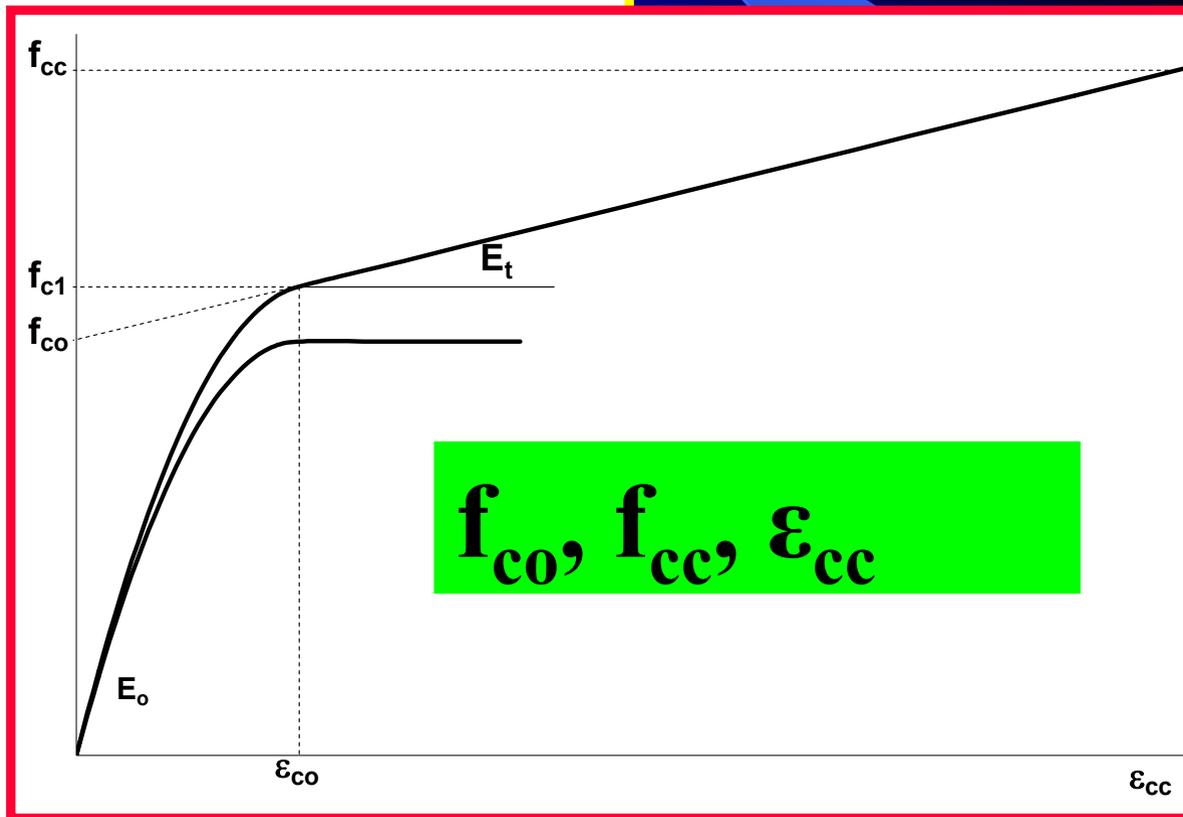
$$a = 1 + \gamma$$

$$b = \gamma - 1$$

with:

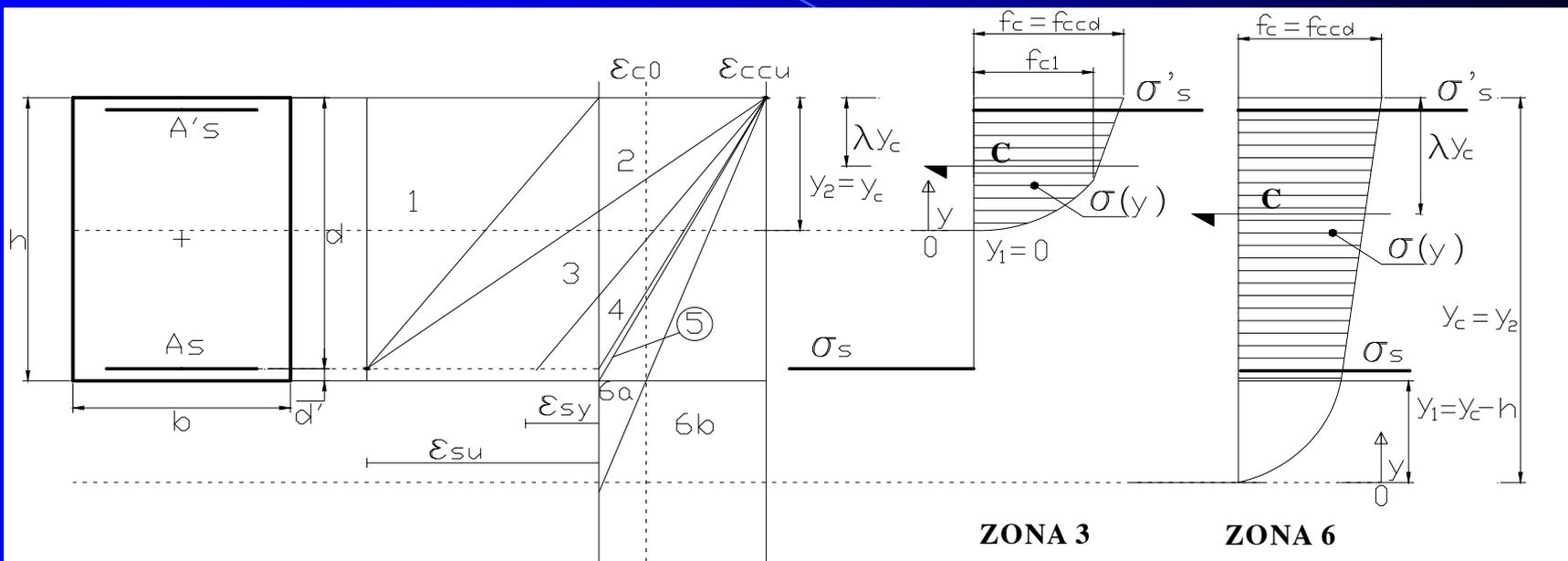
$$\gamma = \frac{f_{c0} + E_t \cdot \varepsilon_{c0}}{f_{c0}} = \frac{f_{c1}}{f_{c0}}$$

$$E_t = \frac{f_{cc} - f_{c0}}{\varepsilon_{cc}}$$





DOMINI DI RESISTENZA (v-μ)



Equazioni di equilibrio sezionali (adimensionali):

$$v = \frac{N_u}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \xi \psi + \omega' \frac{\sigma_{s'}}{f_{ys}} + \omega \frac{\sigma_s}{f_{ys}}$$

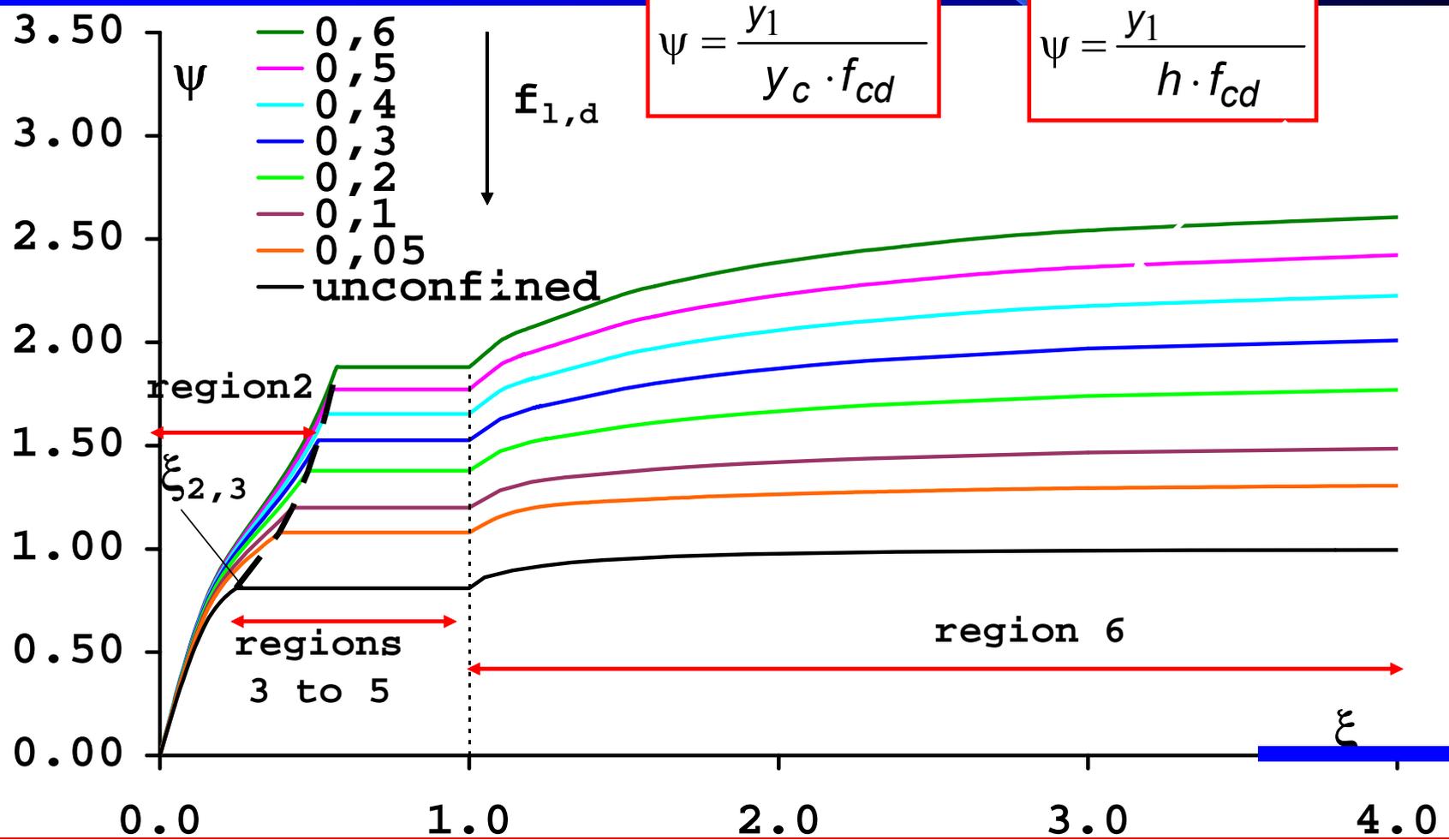
$$\mu = \frac{M_u}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = \xi \psi \cdot (0.5 - \lambda \xi) + \omega' \frac{\sigma_{s'}}{f_{ys}} (0.5 - \delta') - \omega \frac{\sigma_s}{f_{ys}} (0.5 - \delta')$$



PARAMETRO ψ

$$\psi = \frac{y_1}{y_c \cdot f_{cd}}$$

$$\psi = \frac{y_1}{h \cdot f_{cd}}$$

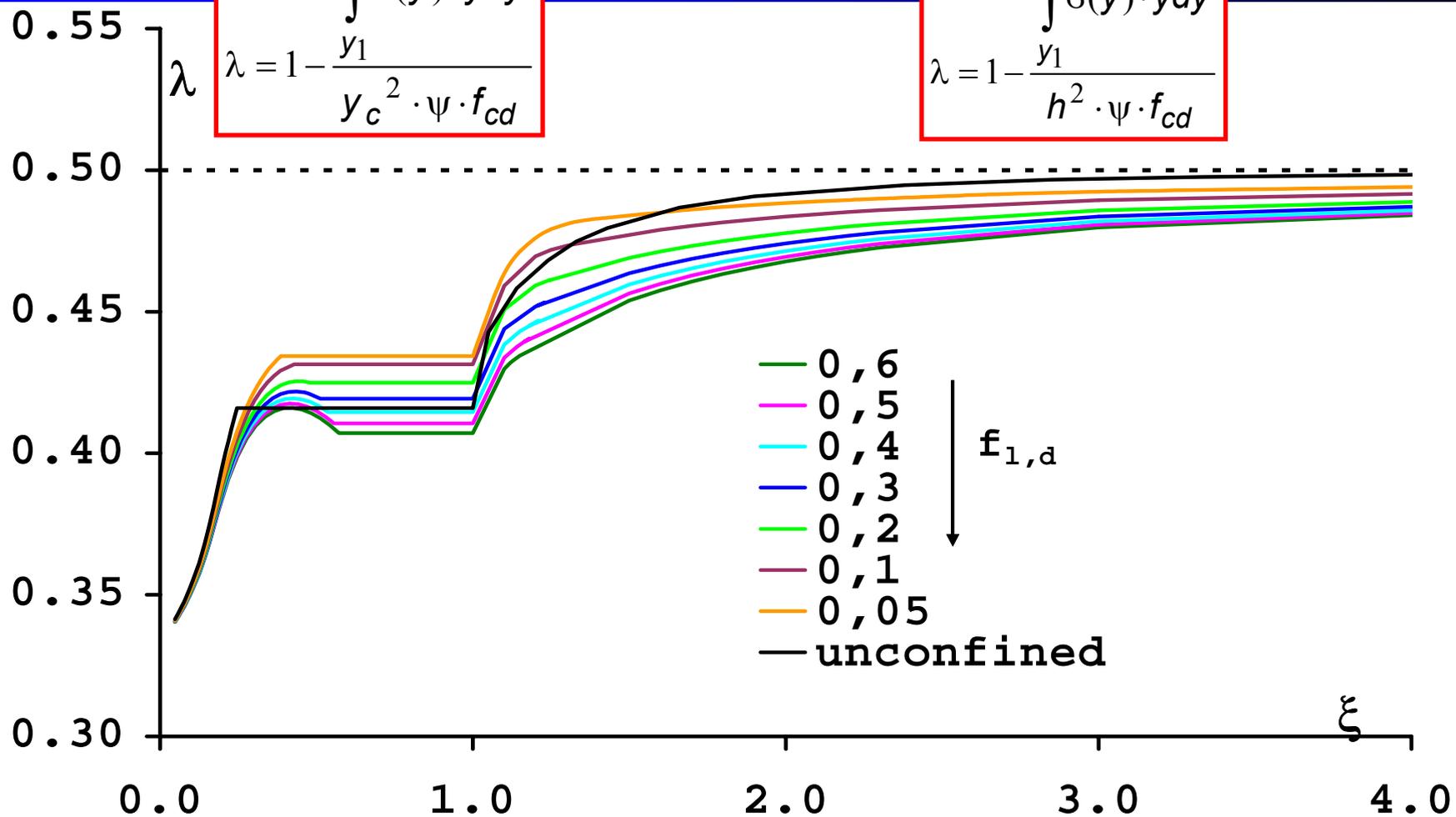




PARAMETER λ

$$\lambda = 1 - \frac{\int_{y_1}^{y_2} \sigma(y) \cdot y dy}{y_c^2 \cdot \psi \cdot f_{cd}}$$

$$\lambda = 1 - \frac{\int_{y_1}^{y_2} \sigma(y) \cdot y dy}{h^2 \cdot \psi \cdot f_{cd}}$$





Funzioni ψ e λ

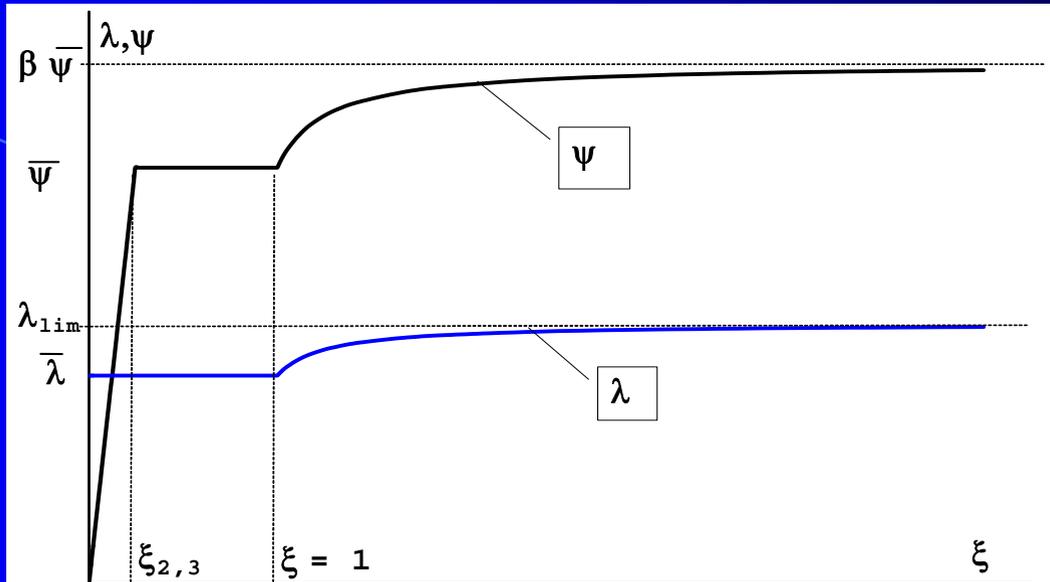
$$\alpha = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}}$$

$$\xi = \frac{y_c}{h}$$

Case A - region 2a, where $\xi < 1$ and $\alpha = \alpha(\xi) \leq 1$:	
$\psi(\xi) = (1+\gamma) \cdot \frac{\alpha(\xi)}{2} - \frac{\alpha(\xi)^2}{3}$	$\lambda(\xi) = 1 - \frac{\left[(1+\gamma) - \frac{3 \cdot \alpha(\xi)}{4} \right]}{\left[(1+\gamma) \cdot \frac{3}{2} - \alpha(\xi) \right]}$
Case B - region 2b where $\xi < 1$ and $\alpha = \alpha(\xi) > 1$:	
$\psi(\xi) = 1 - \frac{1}{3 \cdot \alpha(\xi)} + (\gamma - 1) \cdot \frac{\alpha(\xi)}{2}$	$\lambda(\xi) = 1 - \frac{\left[-\frac{1}{12} + \frac{\alpha(\xi)^2}{2} + \frac{\alpha(\xi)^3}{3} (\gamma - 1) \right]}{\left[1 - \frac{1}{3 \cdot \alpha(\xi)} + (\gamma - 1) \cdot \frac{\alpha(\xi)}{2} \right] \cdot \alpha(\xi)^2}$
Case C - regions 3, 4 and 5, where $\xi \leq 1$ and $\alpha > 1$ ($\alpha = \text{constant}$):	
$\psi(\xi) = 1 - \frac{1}{3 \cdot \alpha} + (\gamma - 1) \cdot \frac{\alpha}{2} = \text{cost}$	$\lambda(\xi) = 1 - \frac{\left[-\frac{1}{12} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} (\gamma - 1) \right]}{\left[1 - \frac{1}{3 \cdot \alpha} + (\gamma - 1) \cdot \frac{\alpha}{2} \right] \cdot \alpha^2} = \text{cost}$
Case D - region 6a, where $1 < \xi \leq \alpha/(\alpha-1)$ and $\alpha > 1$ ($\alpha = \text{constant}$):	
$\psi(\xi) = \frac{2\alpha^3(\xi-1)^3 - 2\xi^3 + 6\alpha\xi^3 - 3\alpha^2\xi \cdot [1+2\xi^2 + \gamma - 2\xi(1+\gamma)]}{6\alpha\xi^2}$	
$\lambda(\xi) = \frac{(1-4\alpha+6\alpha^2) \cdot \xi^4 + \alpha^4 \cdot (\xi-1)^3 \cdot (3+\xi) - 2\alpha^3\xi \cdot [2\xi^3 + 2(1+\gamma) - 3\xi(1+\gamma)]}{2\alpha\xi \cdot \left\{ 2\alpha^3 \cdot (\xi-1)^3 - 2\xi^3 + 6\alpha\xi^3 - 3\alpha^2\xi \cdot [1+2\xi^2 + \gamma - 2\xi(1+\gamma)] \right\}}$	
Case E - region 6b, where $\xi > \alpha/(\alpha-1)$ and $\alpha > 1$ ($\alpha = \text{constant}$):	
$\psi(\xi) = \frac{2\xi + \alpha(2\xi-1)(\gamma-1)}{2\xi}$	$\lambda(\xi) = \frac{3\xi + \alpha(3\xi-2)(\gamma-1)}{3[2\xi + \alpha(2\xi-1)(\gamma-1)]}$



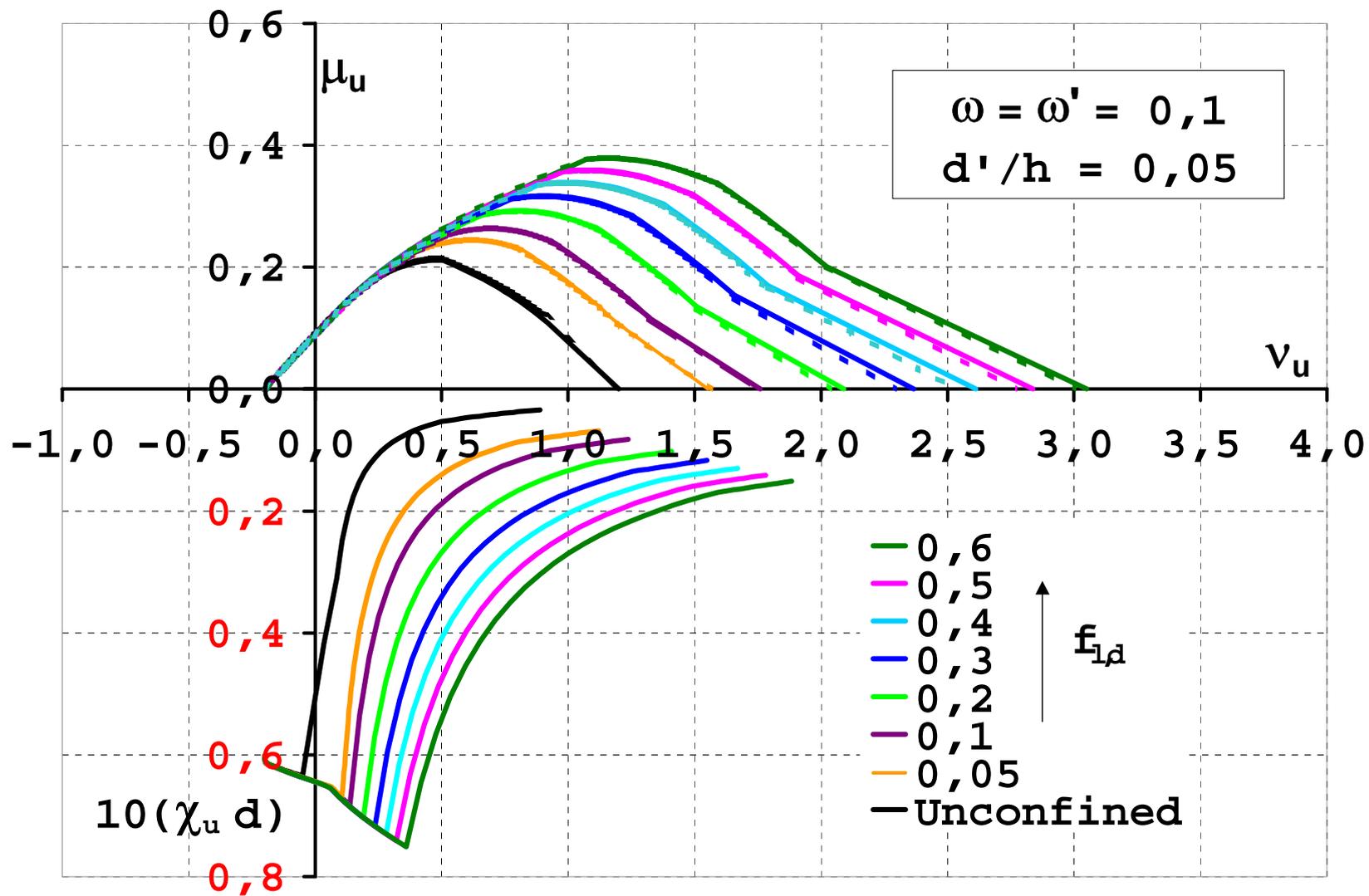
Espressioni semplificate di ψ e λ



Region	ψ	λ
Region 2 ($\xi \leq \xi_{23}$)	$\psi = \bar{\psi} \frac{\xi}{\xi_{23}}$	$\lambda = \bar{\lambda}$
Regions 3,4,5 ($\xi_{23} \leq \xi \leq 1$)	$\psi = \bar{\psi}$	$\lambda = \bar{\lambda}$
Region 6 ($\xi > 1$)	$\Psi = \frac{\beta\xi - \beta + 0.25}{\xi - 0.75} \cdot \bar{\Psi}$	$\lambda = 0.5 \cdot \frac{\xi - (1 - 0.5 \cdot \bar{\lambda})}{\xi - 0.75}$

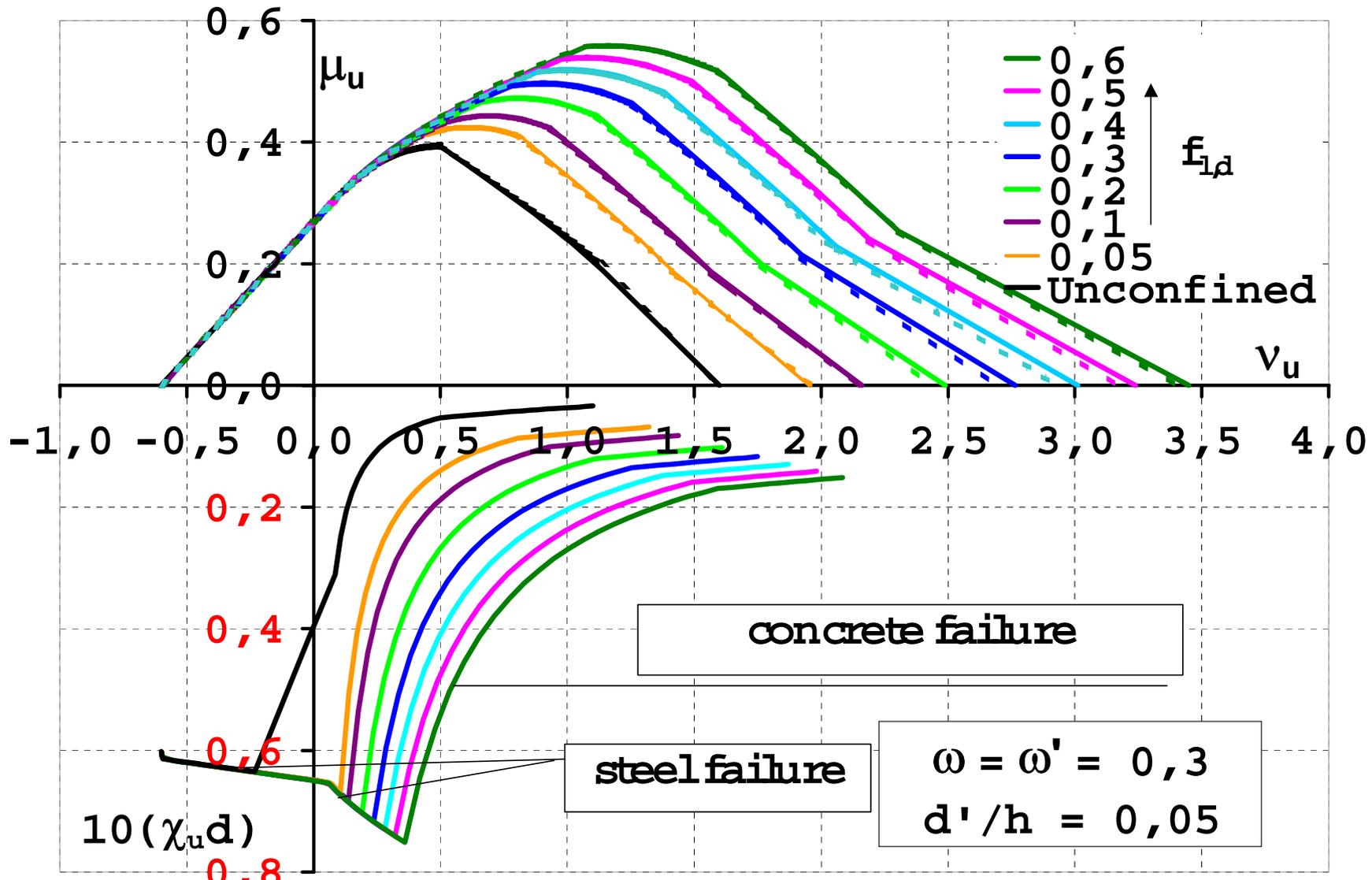


$v-\mu$ INTERACTION CURVES $v-\chi_u$ DIAGRAMS





$v-\mu$ INTERACTION CURVES $v-\chi_u$ DIAGRAMS

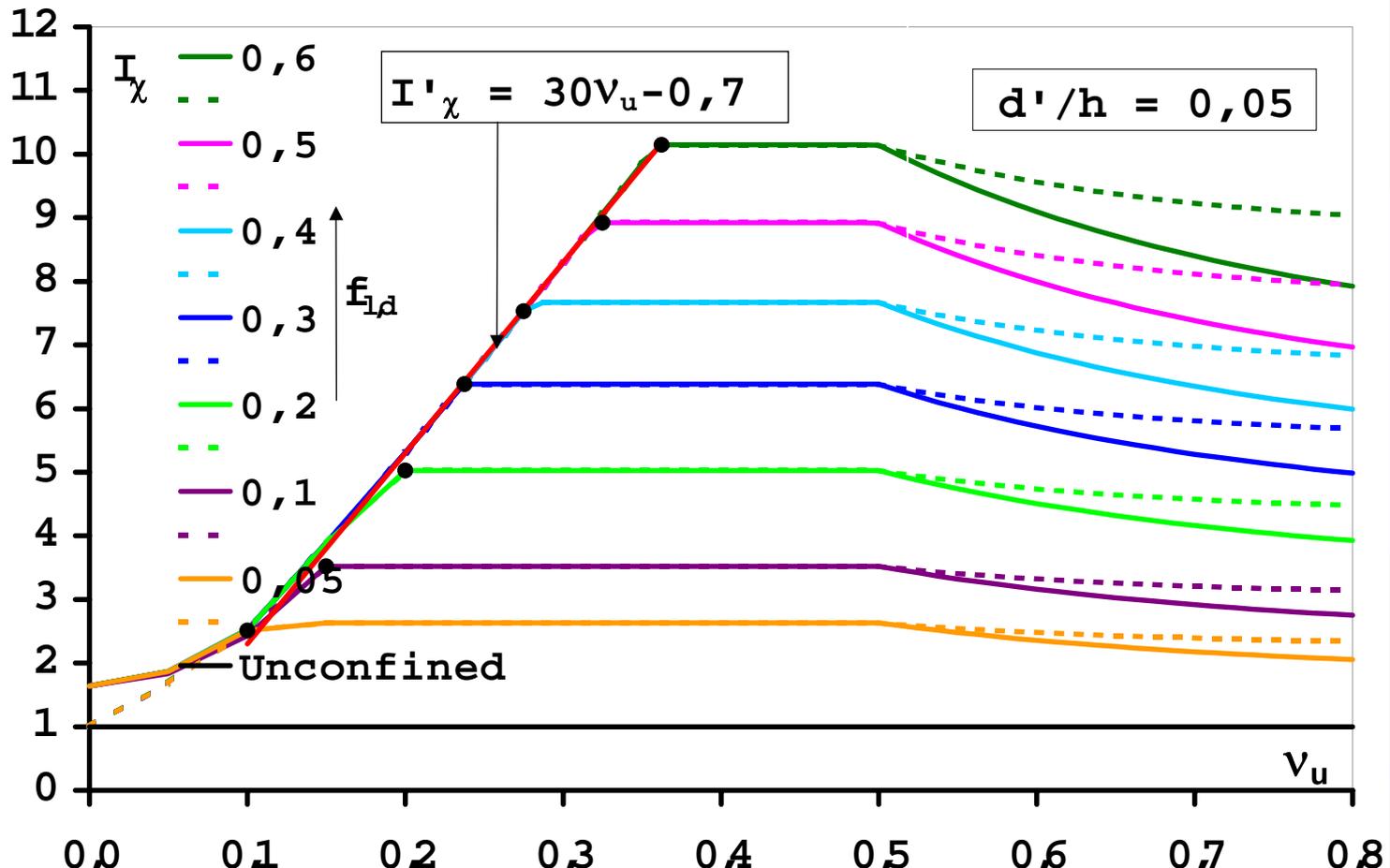




INCREMENTO DI DUTTILITA'

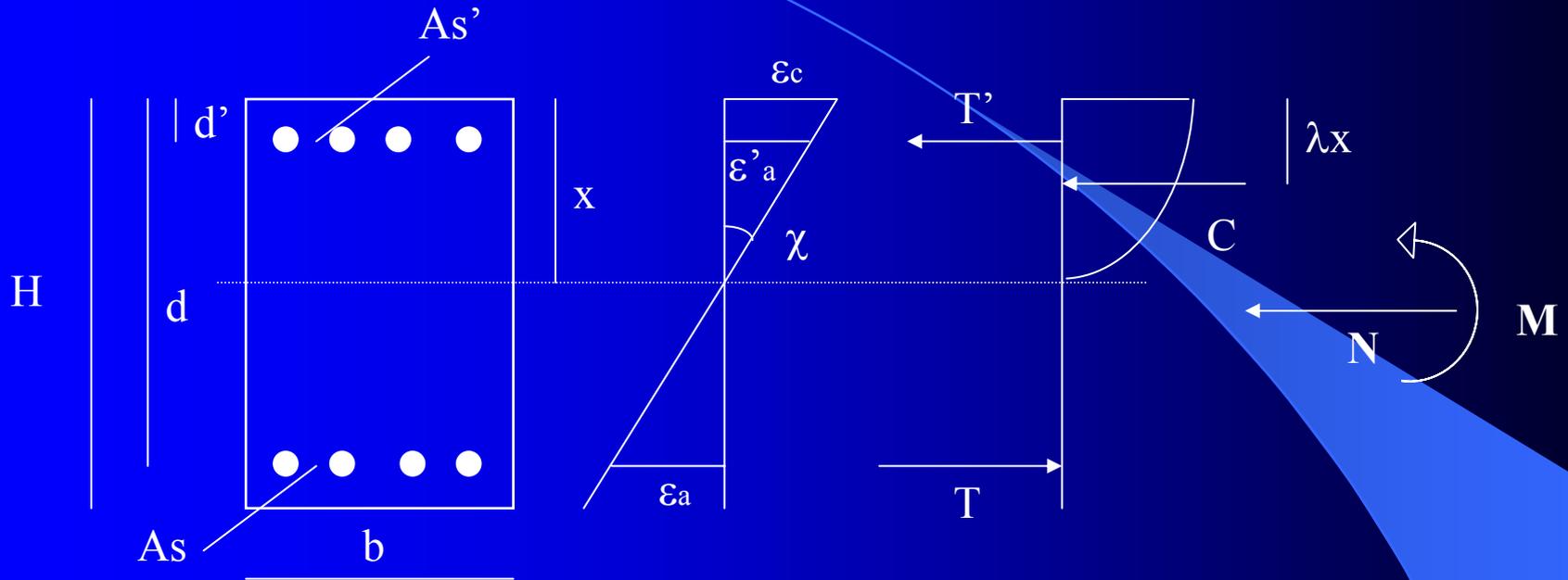
$$I_{\chi} = \frac{\chi_{u,c}}{\chi_{u,nc}} \cong \frac{\chi_{u,c}}{\chi_{y,c}} \cdot \frac{\chi_{y,nc}}{\chi_{u,nc}}$$

$$I_{\chi}''(f_{l,d}) = \frac{\varepsilon_{ccu}}{\varepsilon_{cu}} \frac{\overline{\Psi}_c}{\Psi_{un}} = \frac{0.0035 + 0.015 \cdot \sqrt{f_{l,d}}}{0.0035} \cdot \frac{1.16 \sqrt{f_{l,d}} + 0.3 f_{l,d} + 0.8}{0.8}$$



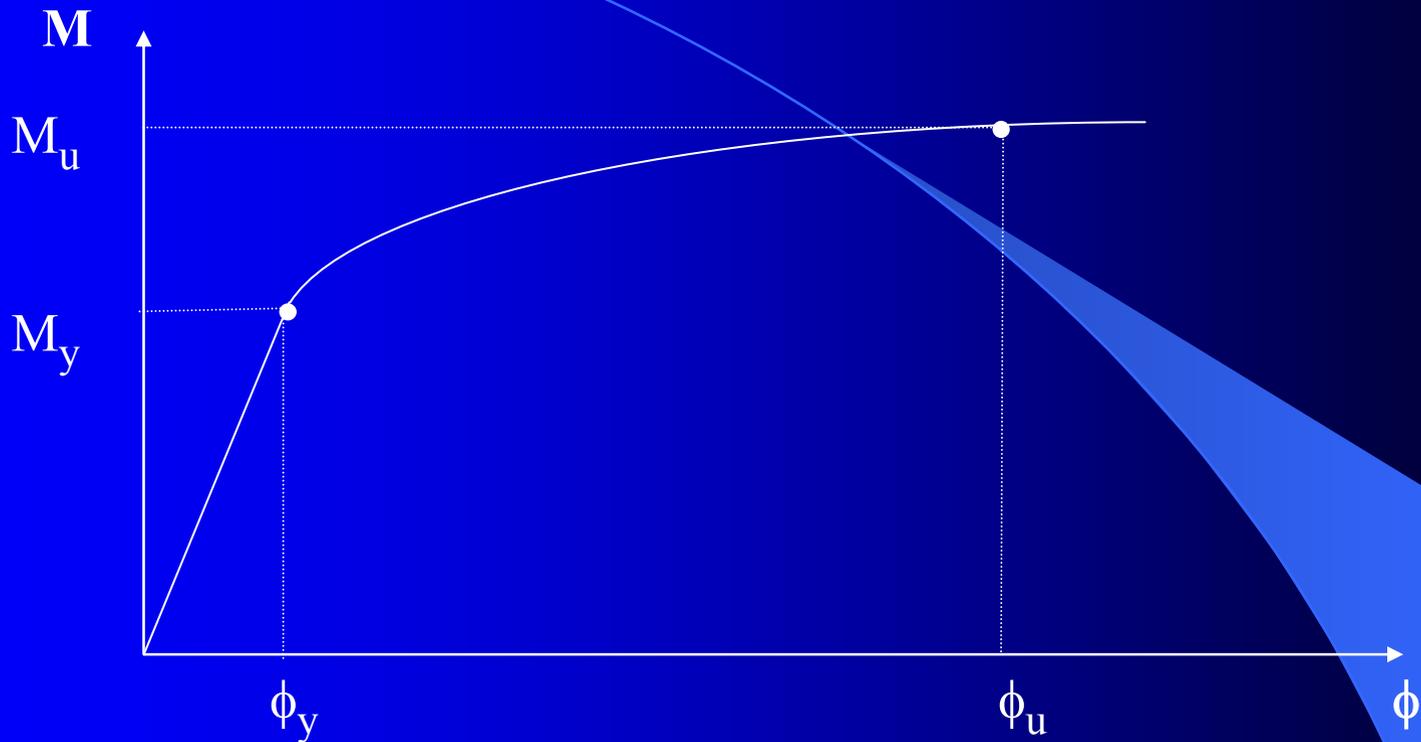
SEZIONI PRESSOINFLESSE

DIAGRAMMA MOMENTO-CURVATURA ($M - \phi - N$)



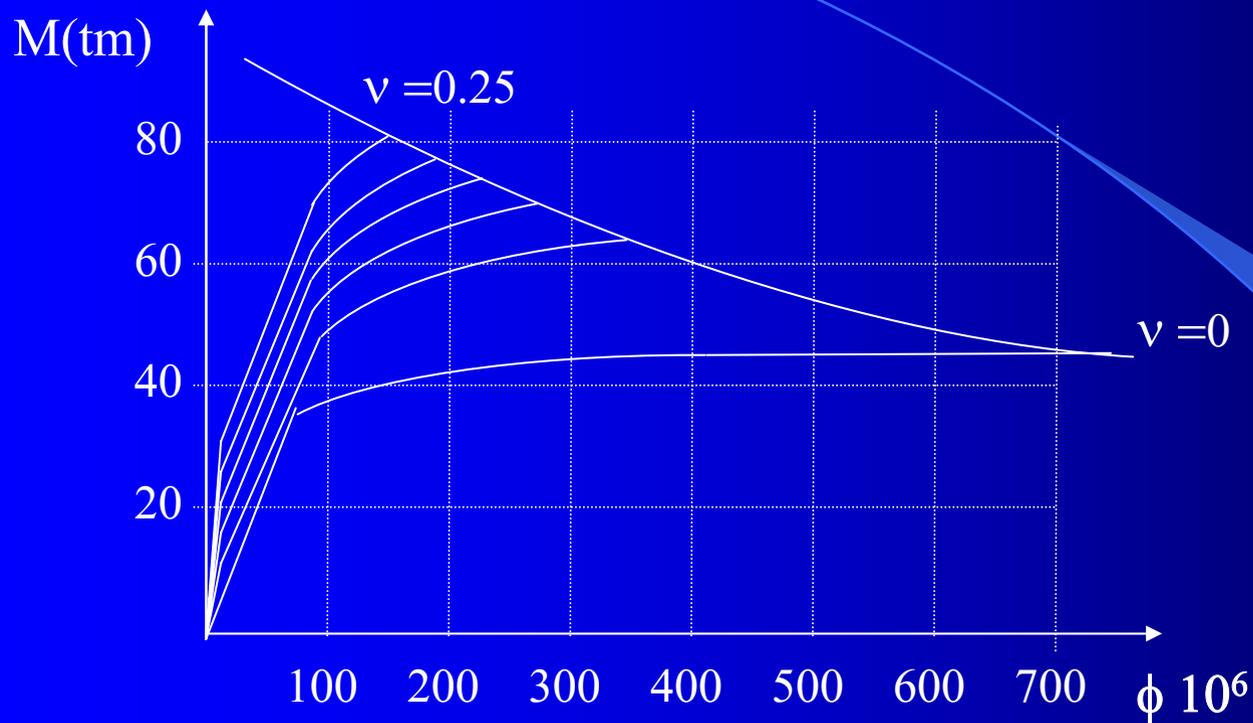
- Determinazione del diagramma momento-curvatura ($M-\phi$) a sforzo normale N costante.
- Per ogni assegnato valore della curvatura ϕ si determina il valore dell'asse neutro delle deformazioni tale che sia soddisfatto l'equilibrio alla traslazione: $N = C + T' - T$.
- Dall'equazione di equilibrio alla rotazione si determina il momento corrispondente, ottenendo quindi un punto di coordinate (M, ϕ).

DIAGRAMMA MOMENTO-CURVATURA ($M - \phi - N$)

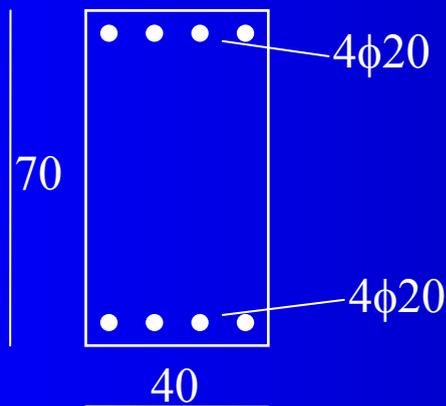


- Determinazione della **curvatura di snervamento** ϕ_y (snervamento delle armature) e della **curvatura ultima** ϕ_u (raggiungimento della deformazione ultima nel calcestruzzo).

Diagrammi Momento-Curvatura al variare di N



$$v = \frac{N}{b d f'_{cd}}$$

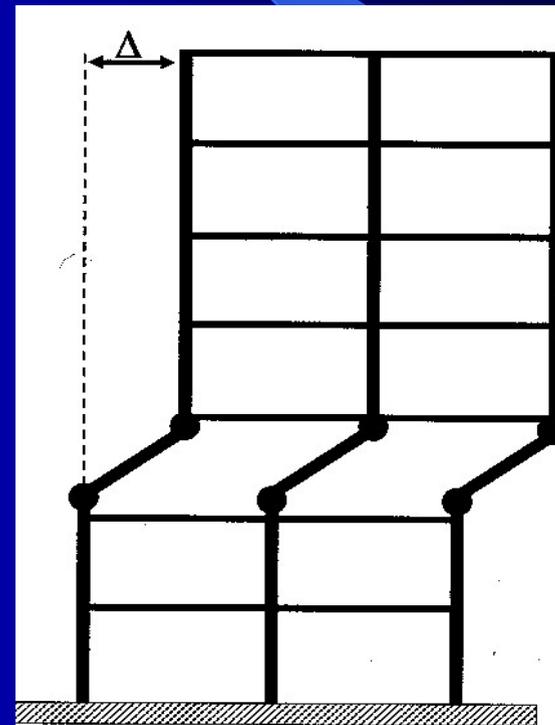
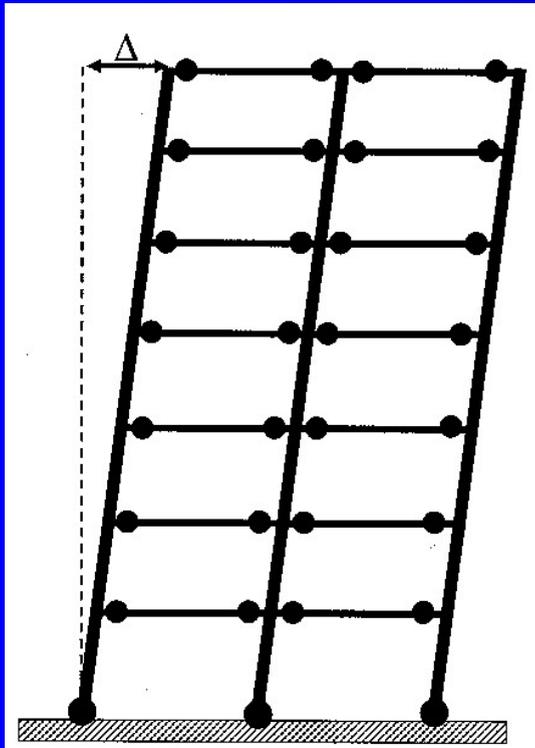


Rck 250 kg/cmq

FeB44k

v	ϕ_u / ϕ_y
0	18,4
0,05	12,5
0,10	8,62
0,15	5,83
0,20	4,09
0,25	3,10

MECCANISMO GLOBALE E MECCANISMO LOCALE DI COLLASSO



MODELLI DI CAPACITÀ

Travi e pilastri: flessione con e senza sforzo normale

La capacità deformativa θ di travi e pilastri è definita come rapporto tra lo spostamento trasversale della sezione di momento nullo e la **distanza** di tale sezione dalla cerniera plastica (**luce di taglio**).

$$L_v = \frac{M}{V}$$



La capacità deformativa così valutata si differenzia in relazione ai 3 stati limite considerati.

- **Stato limite di Danno Limitato** (SL-DL)
- **Stato limite di Danno Severo** (SL-DS)
- **Stato limite di Collasso** (SL-CO)

Capacità rotazionale

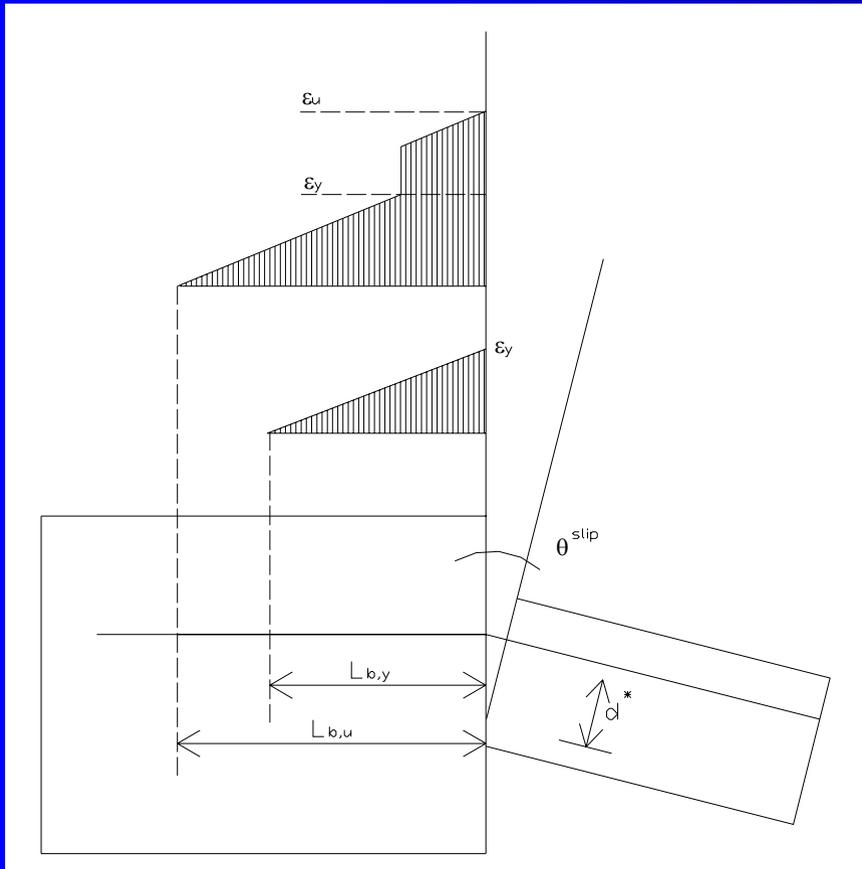
L'espressione più semplice:

$$\theta_{pl} = \phi_{pl} \cdot l_{pl} = \phi_{pl} \cdot (0.5 \cdot d)$$

La lunghezza della cerniera plastica considerando il rapporto M_u/M_y e la snellezza di taglio ($\lambda=M_u/Vd$)

$$\begin{aligned} l'_{pl} &= 0.5 \cdot \frac{M_u - M_y}{M_u} \cdot \frac{M_u}{V} = 0.5 \cdot \left(1 - \frac{f_y}{f_t}\right) \cdot l_v = \\ &= 0.5 \cdot \psi \cdot l_v \end{aligned}$$

Influenza del cedevolezza del vincolo/nodo



$$l_{a,y} = \frac{d_b \cdot f_y}{4 \cdot \tau_{a,y}} \quad l_{a,u} = \frac{d_b \cdot f_t}{4 \cdot \tau_{a,u}}$$

$$\Delta\theta_{pl} = \frac{\Delta l_{a,u} - \Delta l_{a,y}}{d^*} = \left(\frac{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sy}}{d^*} \right) \cdot \left(\frac{f_t - f_y}{f_t} \right) \cdot l_{a,u}$$

$$\cong \phi_{pl,s} \cdot \Psi \cdot \frac{d_b \cdot f_t}{4 \cdot \tau_{a,u}}$$

Le espressioni della lunghezza della cerniera plastica

$$l_{pl} = l'_{pl} + l''_{pl} = 0.5 \cdot \psi \cdot l_v + \psi \cdot \frac{f_t}{4 \cdot \tau_{a,u}} \cdot d_b = k_1 \cdot l_v + k_2 \cdot d_b$$

$$l_{pl} = 0.08 \cdot l_v + 0.022 \cdot f_y \cdot d_b$$

Priesteley (1996)

$$l_{pl} = 0.5 \cdot \psi \cdot l_v + 1.2 \cdot \psi \cdot \frac{f_t}{4 \cdot \tau_{a,y}} \cdot d_b$$

Lehman (1998)

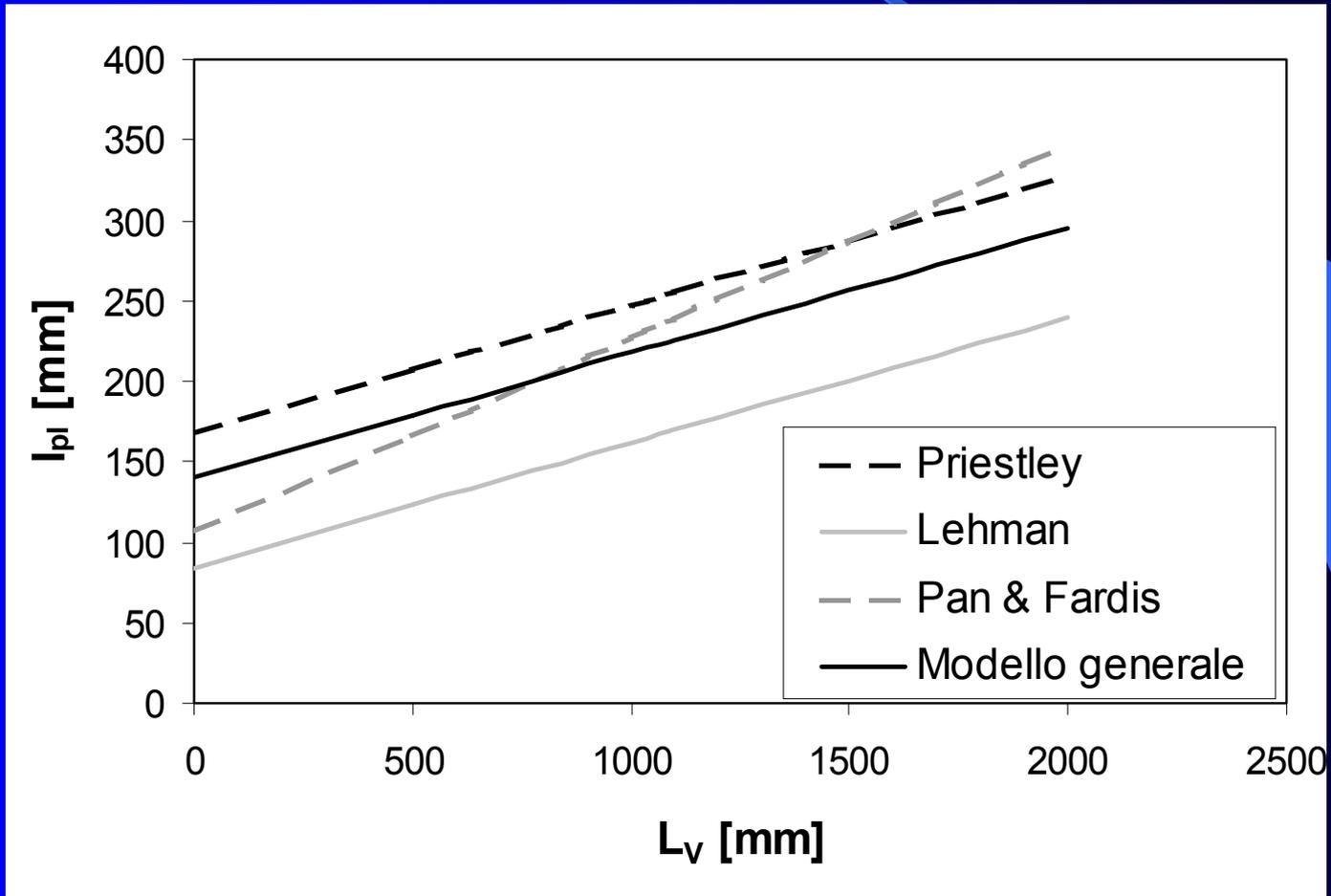
$$l_{pl} = 0.12 \cdot l_v + 0.014 \cdot f_y \cdot d_b$$

Panagiotakos & Fardis (2001)

$$l_{pl} = 0.1 \cdot l_v + 0.17h + \frac{0.24 \cdot f_y \cdot d_b}{\sqrt{f_c}}$$

O.P.C.M. 3274

Lunghezza della cerniera plastica in funzione della luce di taglio (M/V)



La capacità rotazionale rispetto alla corda secondo O.P.C.M. 3274

Opzione n.1 (regressione numerico-sperimentale)

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} \cdot 0.016 \cdot (0.3^v) \cdot \left[\frac{\max(0.01, \omega')}{\max(0.01, \omega)} \cdot f_c \right]^{0.225} \cdot \left(\frac{l_v}{h} \right)^{0.35} \cdot 25^{(\alpha \rho_{sx} f_{wy} / f_c)} \cdot 1.25^{100 \rho_d}$$

Opzione n.2 (teorica con taratura sperimentale)

$$\theta_u = \frac{1}{\gamma_{el}} \cdot \left(\theta_y + (\phi_u - \phi_y) \cdot L_{pl} \cdot \left(1 - \frac{0.5 L_{pl}}{L_v} \right) \right) \quad \text{con}$$

$$\theta_y = \phi_y \frac{L_v}{3} + 0.0013 \cdot \left(1 + 1.5 \frac{h}{L_v} \right) + 0.13 \cdot \phi_y \frac{d_b \cdot f_y}{\sqrt{f_c}}$$

MODELLAZIONE CERNIERE PLASTICHE

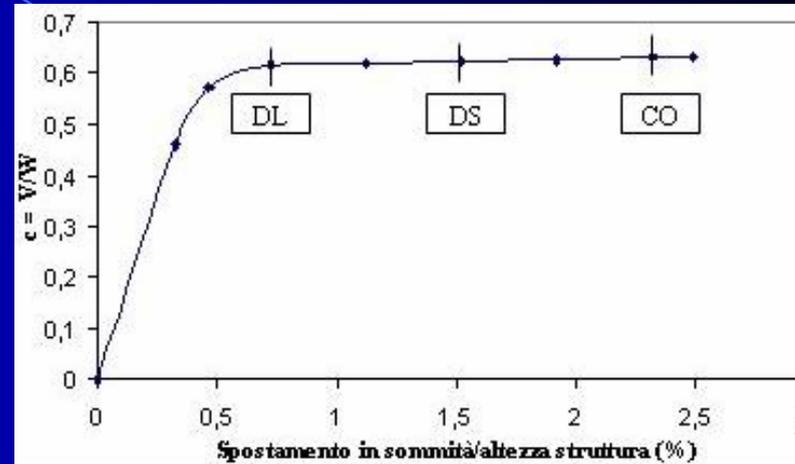
Diagrammi Momento-Rotazione

Rotazione allo snervamento:

$$\theta_u = \theta_y + (\phi_u - \phi_y) \cdot L_{pl} \cdot \left(1 - \frac{0.5L_{pl}}{L_V}\right)$$

Rotazione ultima:

$$\theta_y = \phi_y \frac{L_V}{3} + 0.0013 \cdot \left(1 + 1.5 \frac{h}{L_V}\right) + 0.13 \cdot \phi_y \frac{d_b \cdot f_y}{\sqrt{f_c}}$$

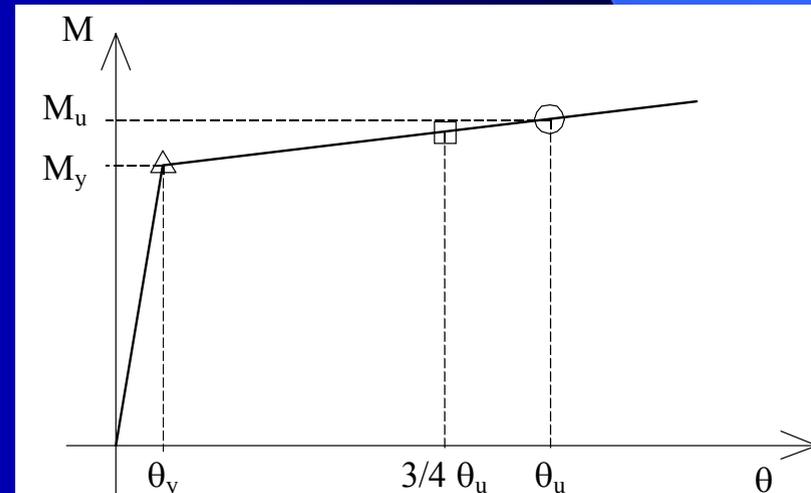


Ordinanza n. 3274 del 20 Marzo 2003

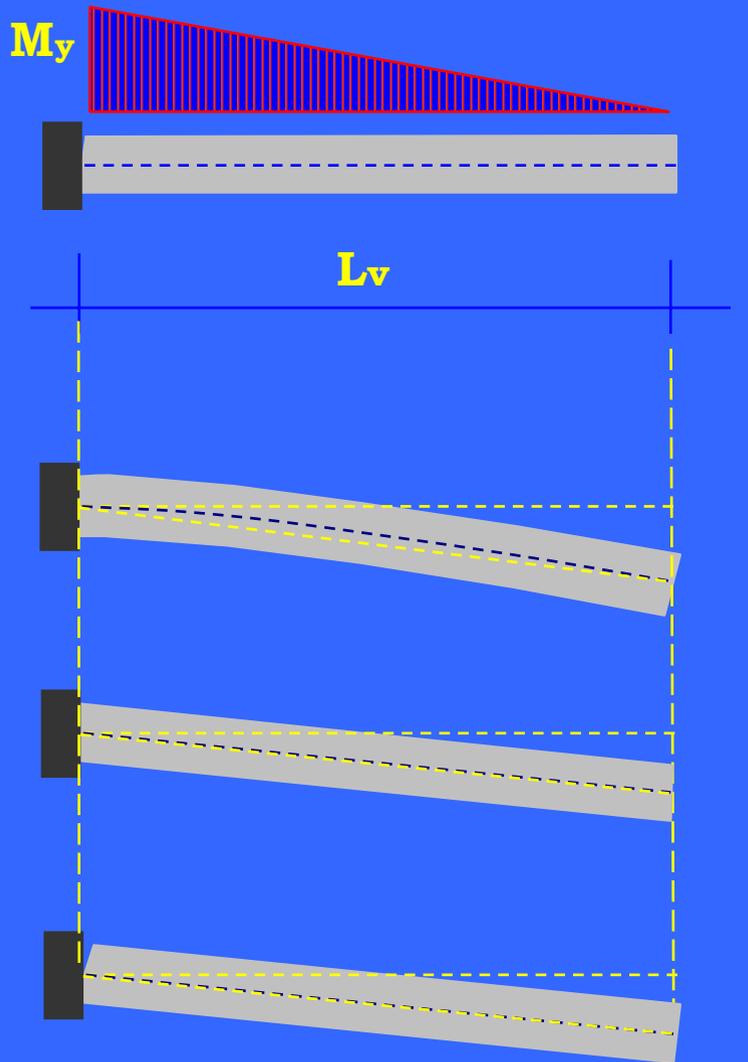
Stato Limite di Danno Limitato DL

Stato Limite di Danno Severo DS

Stato Limite di Collasso CO



MODELLI DI CAPACITÀ



Rotazione di snervamento

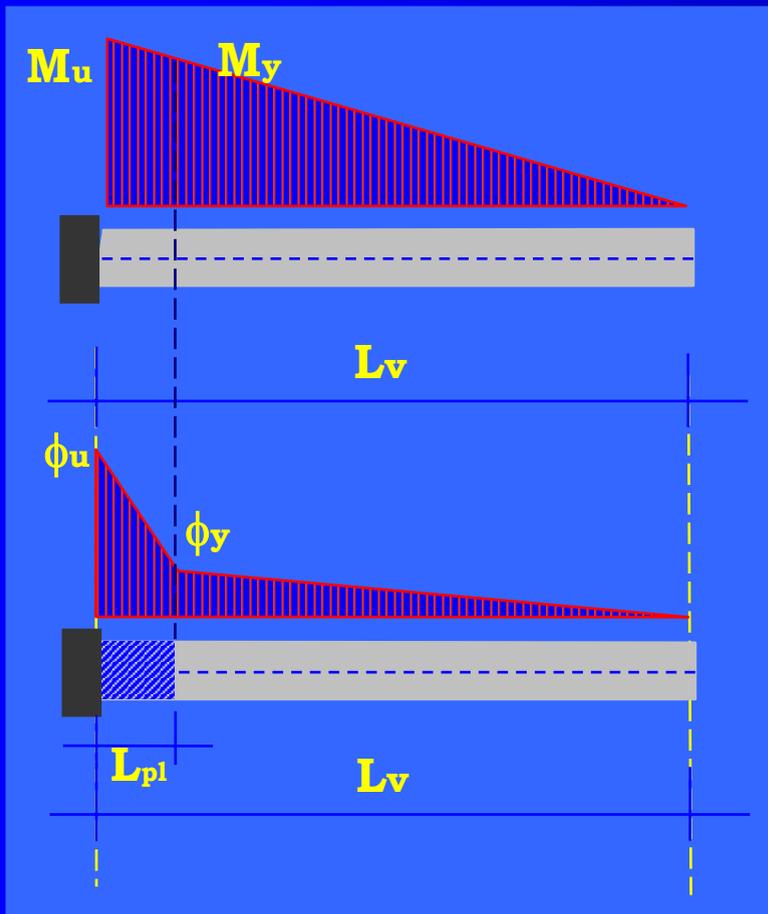
$$\theta_y = \phi_y \frac{L_v}{3} + 0.0013 \cdot \left(1 + 1.5 \frac{h}{L_v} \right) + 0.13 \cdot \phi_y \frac{d_b \cdot f_y}{\sqrt{f_c}}$$

Contributo
flessionale

Contributo
tagliante

Scorrimento
delle barre

MODELLI DI CAPACITÀ



Rotazione ultima

$$\theta_u = \theta_y + (\phi_u - \phi_y)L_{pl} \left(1 - \frac{0.5L_{pl}}{L_v} \right)$$

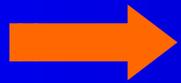
ϕ_y è la curvatura a snervamento valutata considerando la deformazione di snervamento dell'armatura tesa

ϕ_u è la curvatura ultima valutata considerando la deformazione ultima del cls

MODELLI DI CAPACITÀ

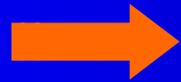
I valori di massima capacità deformativa sono differenti in relazione a i 3 stati limite

SL-DL



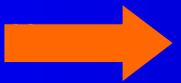
$$\theta_{u,DL} = \theta_y$$

SL-DS



$$\theta_{u,DS} = \theta_y + \frac{3}{4}(\theta_u - \theta_y)$$

SL-DC



$$\theta_{u,CO} = \theta_u = \theta_y + (\phi_u - \phi_y)L_{pl} \left(1 - \frac{0.5L_{pl}}{L_v} \right)$$

Un programma sperimentale



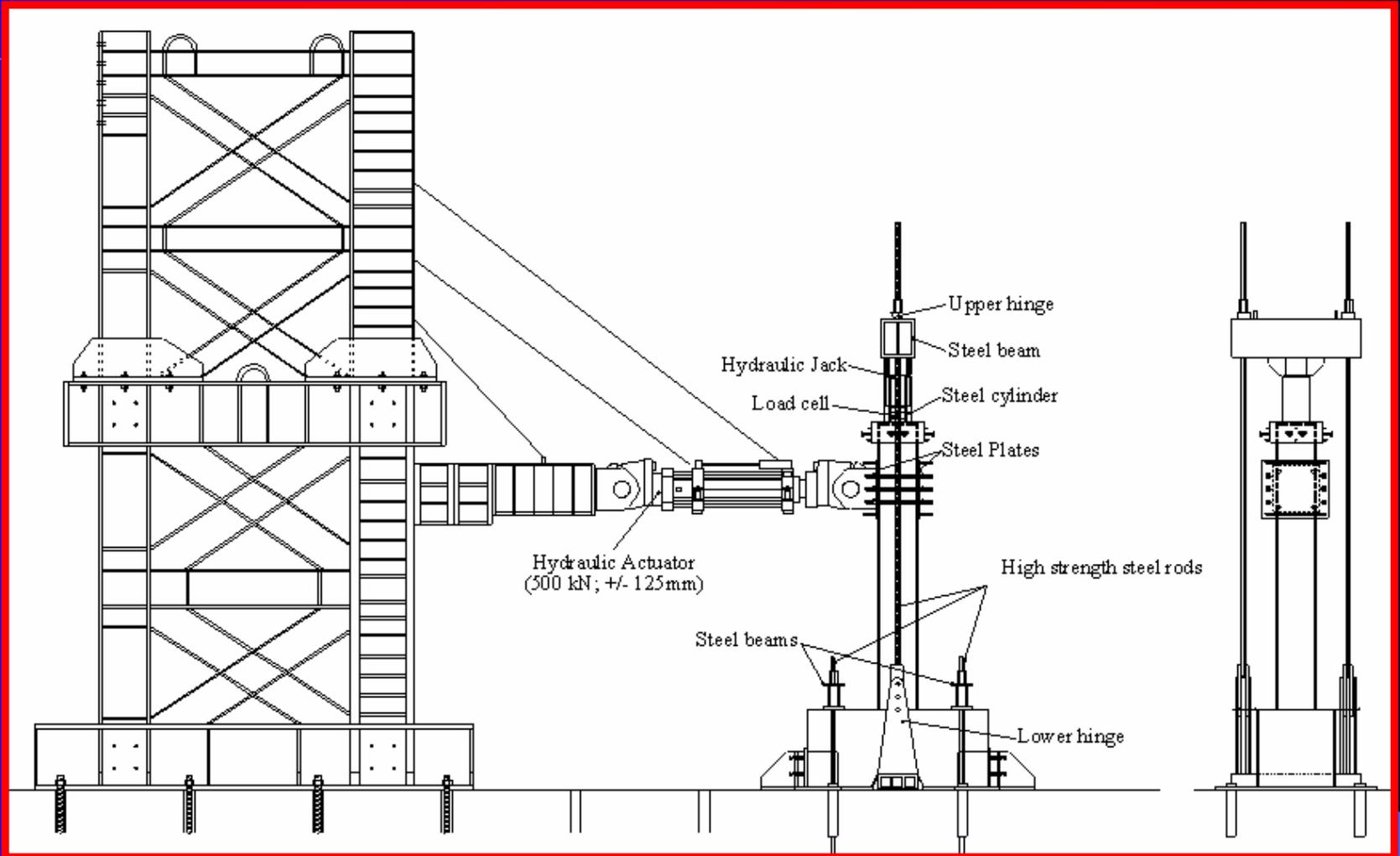
FRP properties

Fiber	t_j [mm]	E_{FRP} [GPa]	$f_{u,FRP}$ [MPa]	$\epsilon_{u,FRP}$ [%]
CFRP*	0.22	390	3000	0.80
GFRP**	0.48	80.6	2560	3-4

*commercialized by SIKA; ** commercialized by MAPEI



Test set-up





Tests on FRP confined columns





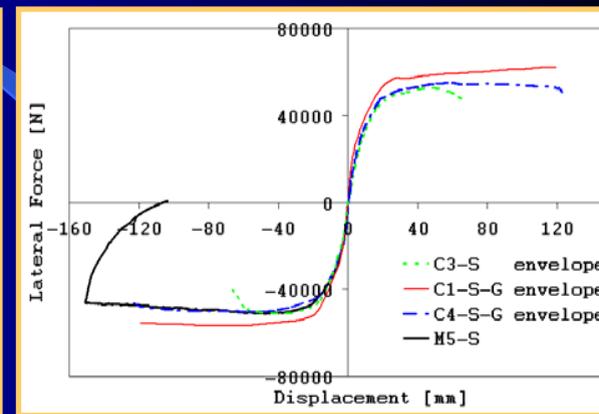
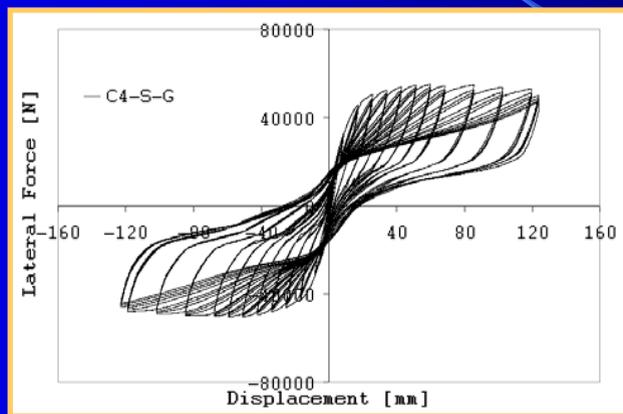
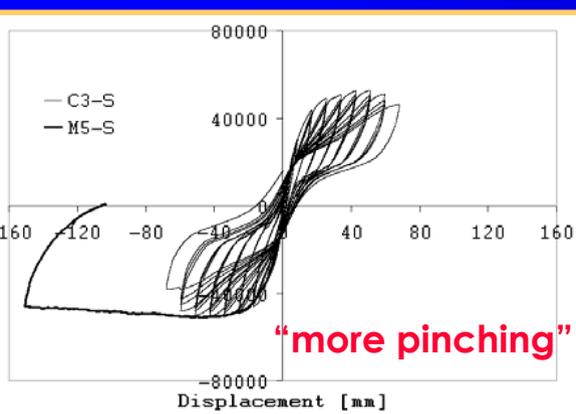
Tests on FRP confined columns



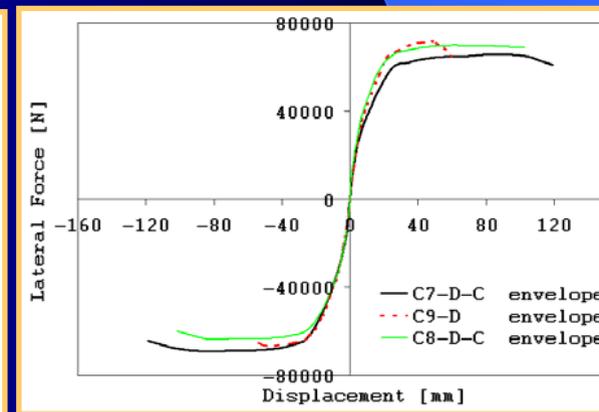
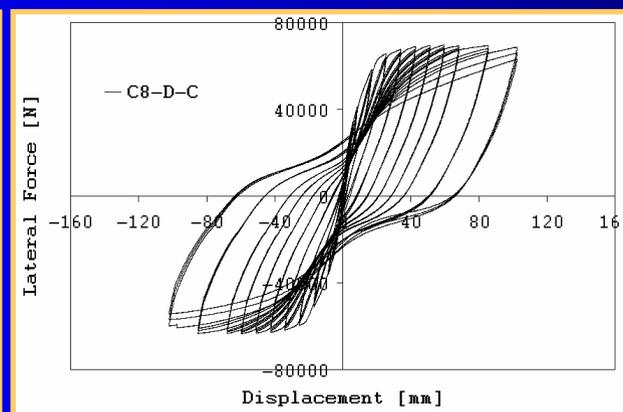
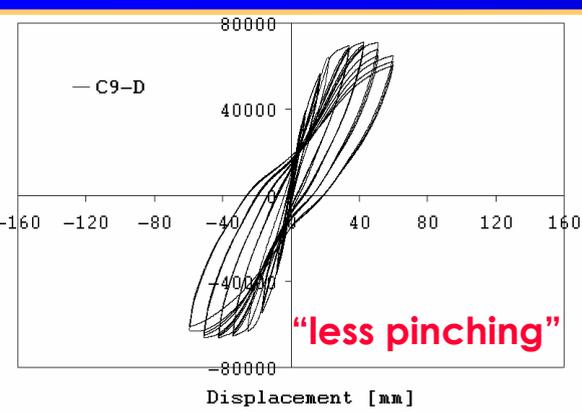


Hysteretic loops and load-displacement envelopes

Column reinforced with smooth rebars (barre lisse)

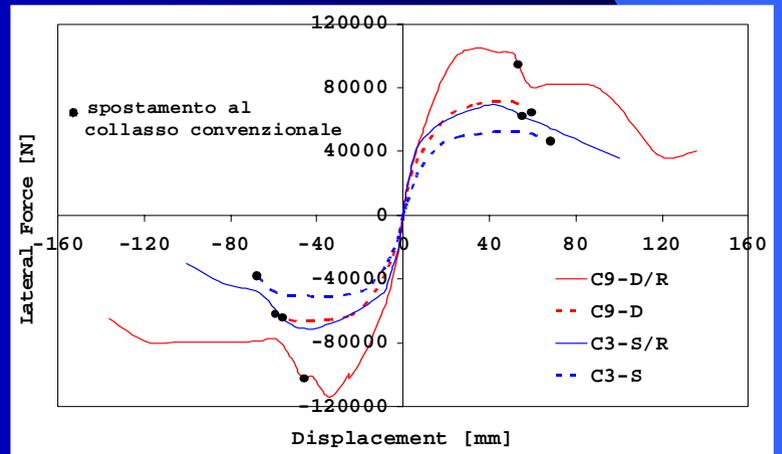
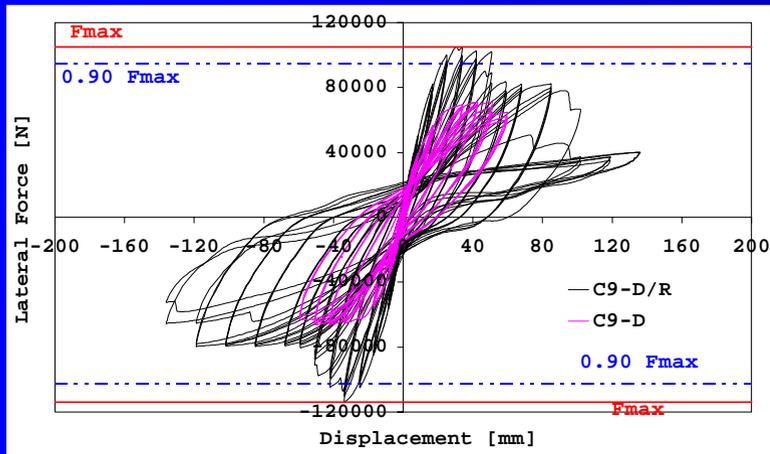
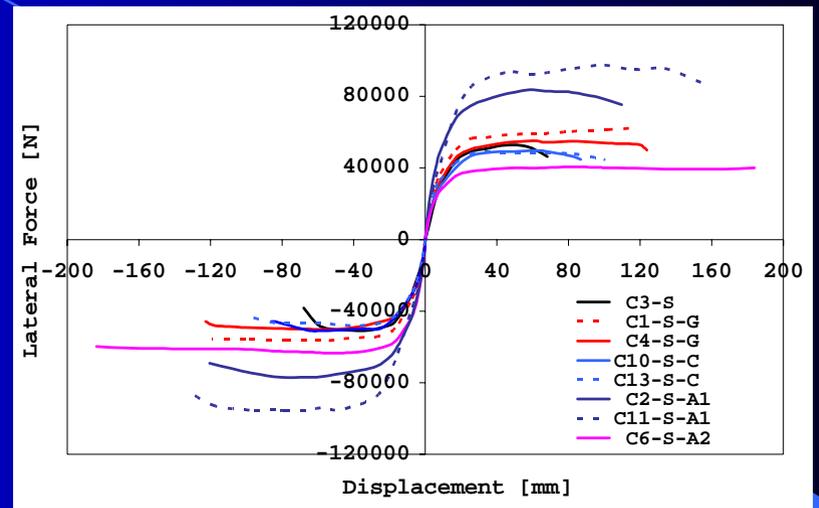
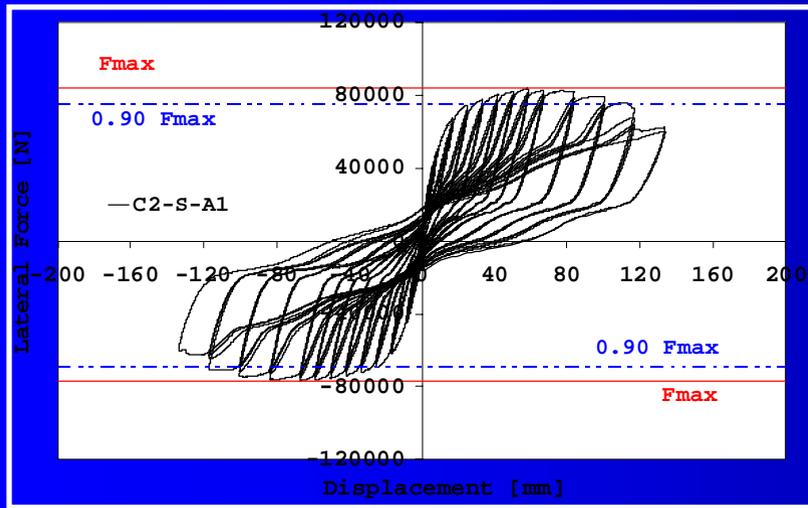


Column reinforced with deformed rebars (barre ad ader. migliorata)





Hysteretic loops and load-displacement envelopes



ORDINE DEGLI INGEGNERI

Corso di aggiornamento sulla normativa sismica
gen. 2006 – mar. 2007

STATO LIMITE ULTIMO PER TENSIONI NORMALI



Prof. Ciro FAELLA

Dipartimento di Ingegneria Civile

Università di Salerno

ORDINE DEGLI INGEGNERI

Corso di aggiornamento sulla normativa sismica
gen. 2007 – mar. 2007

**La verifica a taglio delle travi in c.a.
allo Stato Limite Ultimo (S.L.U.)**



Prof. Ciro FAELLA

Dipartimento di Ingegneria Civile

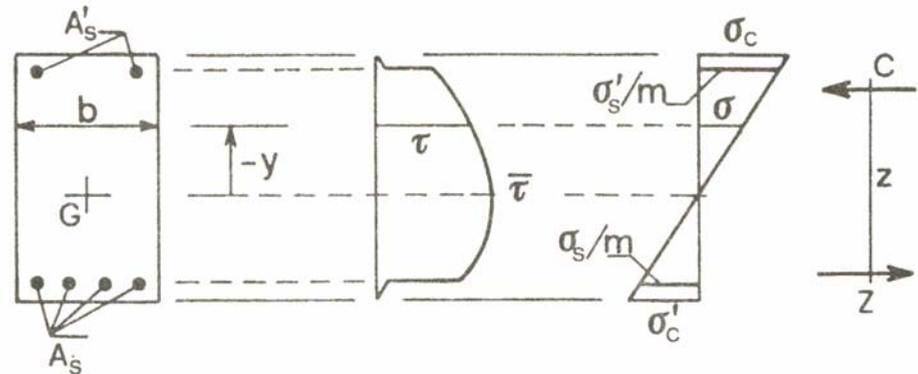
Università di Salerno

Articolazione punti significativi

- 1) Il comportamento sperimentale
- 2) Le travi senza armatura trasversale
- 3) Le travi con armatura, verifica e progetto
- 4) Confronti tra D.M. ed Eurocodice
- 5) Applicazioni
- 6) Prescrizioni normative per elementi inflessi

• Alcune incongruenze della teoria tecnica:
 * nelle fessure dovrebbe essere nulla anche la τ oltre che la σ
 * nella teoria tecnica si ammette che la resistenza a trazione è nulla, ma allora anche la resistenza tangenziale dovrebbe essere nulla.

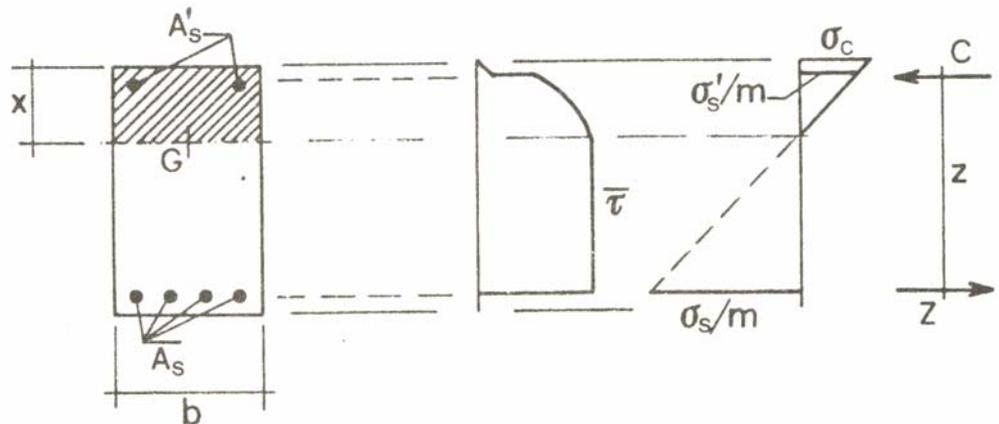
STADIO I - non fessurato



JOURAWSKY

$$\tau = \frac{VS_i}{I; b}$$

$$\bar{\tau} = \frac{V}{zb}$$



STADIO II - fessurato

Il comportamento sperimentale

- In elementi inflessi, per valori bassi del taglio, le membrature si comportano come solidi di materiale omogeneo ed isotropo, senza fessurazioni
- Al crescere del carico e quindi delle sollecitazioni flettenti e taglianti compaiono fessurazioni ortogonali alle isostatiche di trazione ovvero parallelamente a quelle di compressione.

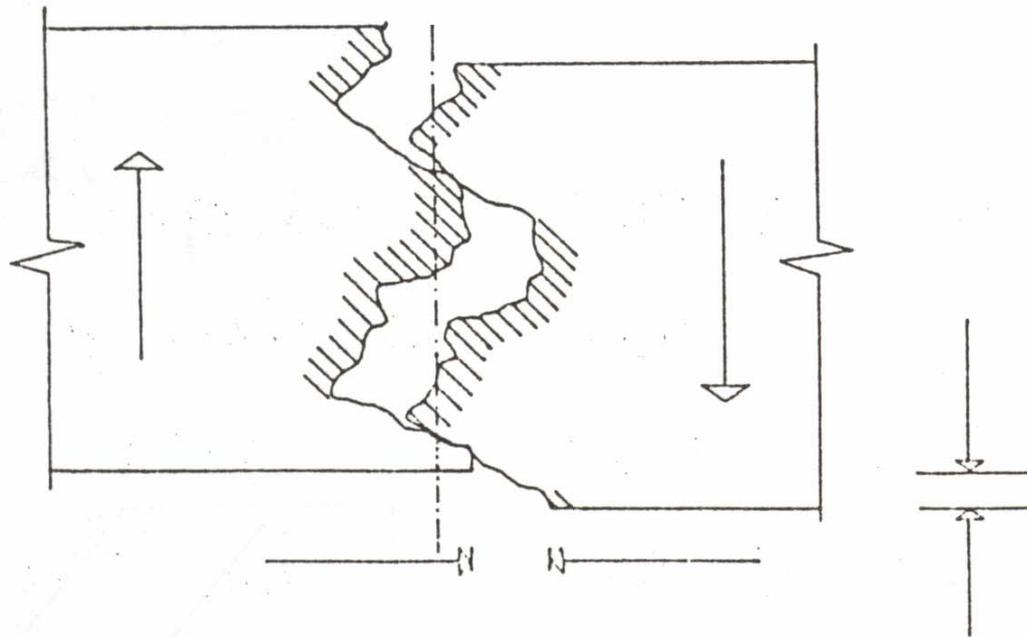
Il comportamento sperimentale

- In travi semplicemente appoggiate, sottoposte a carichi gravitazionali distribuiti o concentrati ai terzi, si osservano in mezzzeria, dove la flessione è massima ed il taglio minimo, fessure sostanzialmente verticali;
- Verso gli appoggi, dove il momento è minimo ed il taglio massimo, si osservano lesioni inclinate a 45° rispetto all'orizzontale.

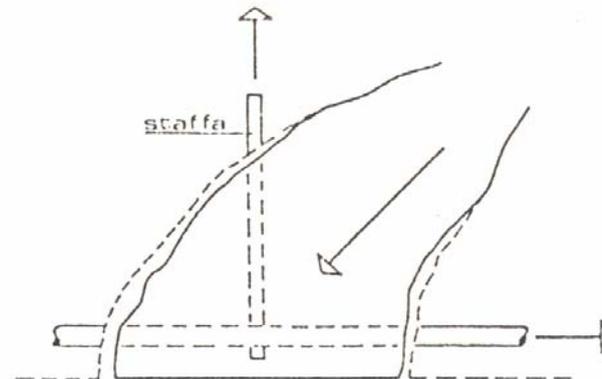
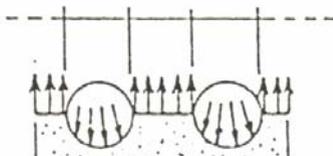
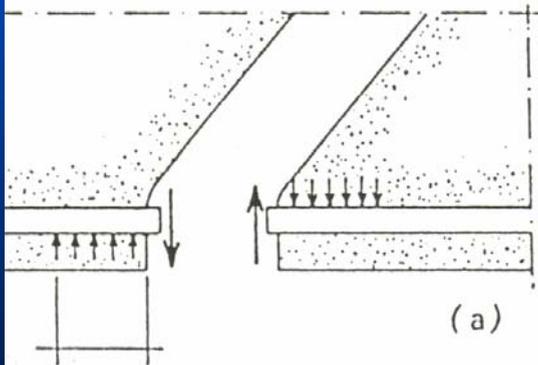
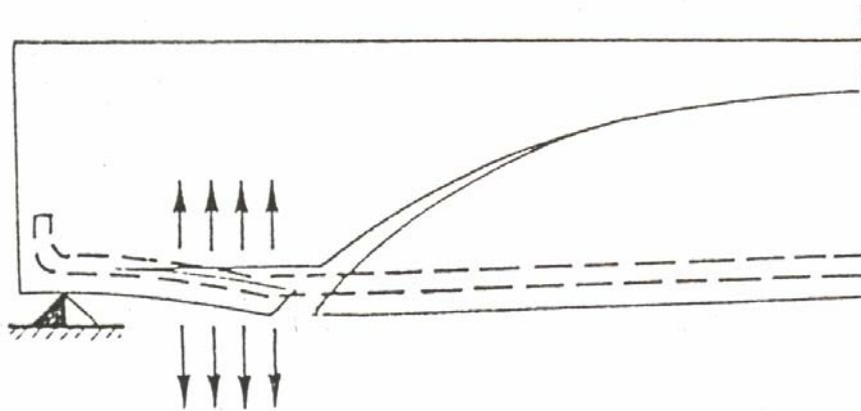
Successivamente alla fessurazione, il meccanismo resistente è affidato ad una molteplicità di meccanismi che interagiscono tra di loro:

- Meccanismo reticolare alla Ritter-Morsch
- Resistenza delle bielle di calcestruzzo incastrate al corrente compresso:
- Effetto d'ingranamento degli inerti
- Effetto spinotto
- Effetto arco

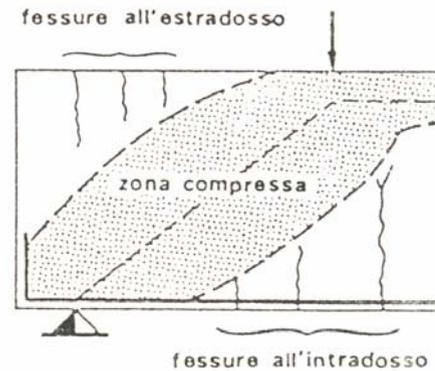
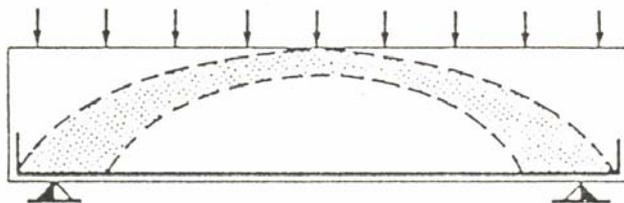
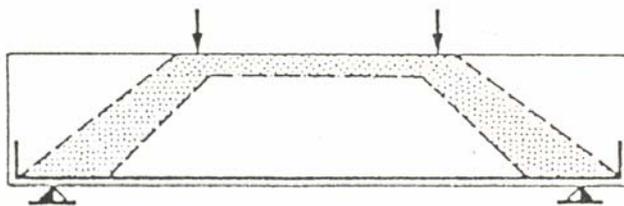
Effetto ingranamento degli inerti



Effetto spinotto

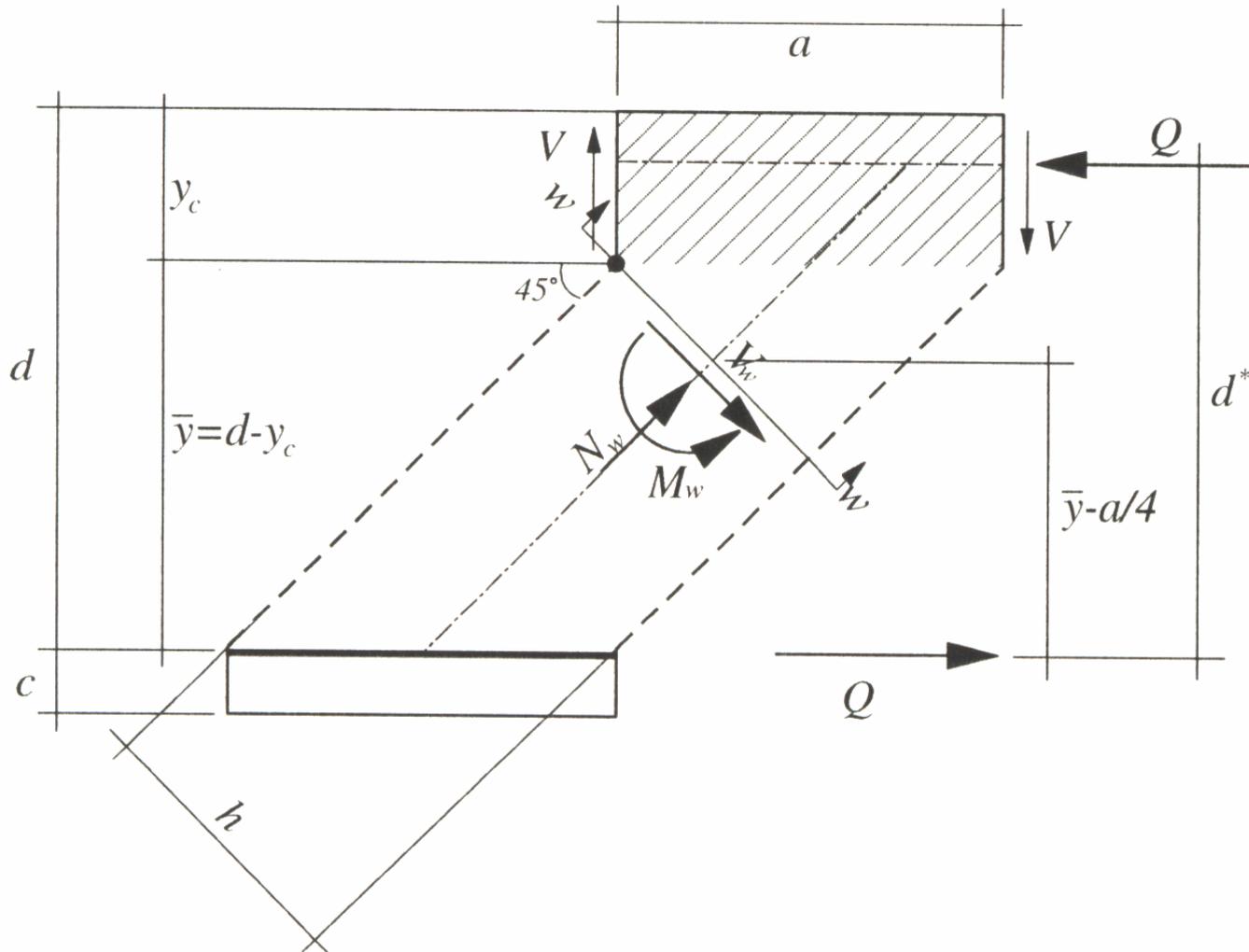


Comportamento ad arco



Particolare dell'appoggio

La trave priva di armatura a taglio



Il meccanismo a pettine

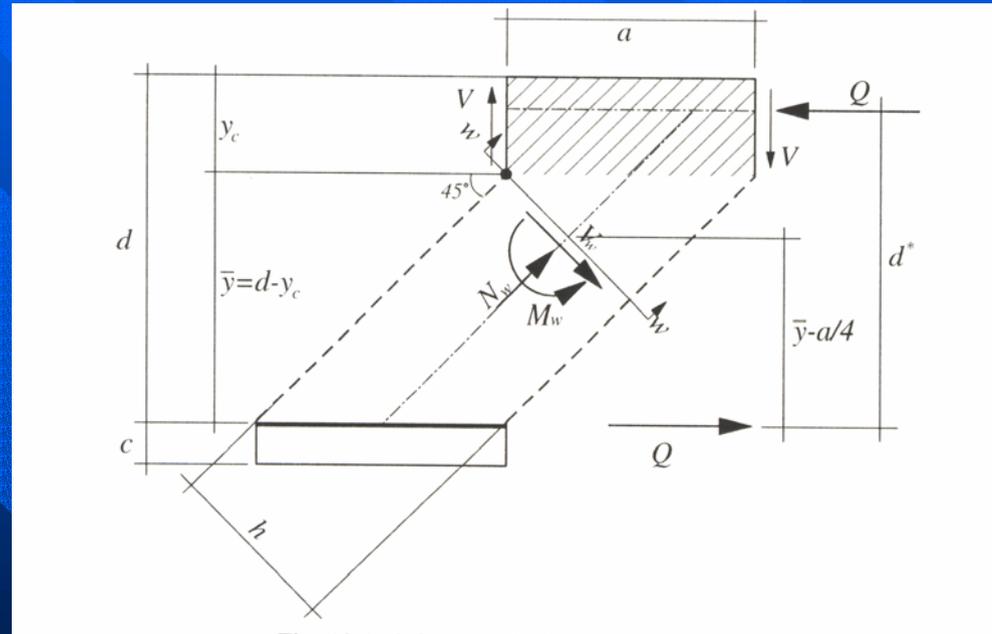
$$Q = \frac{\Delta M}{d^*} = \frac{V \cdot a}{d^*}$$

$$M_w = Q \cdot \left(\bar{y} - \frac{a}{4} \right)$$

$$N_w = Q \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma_t = \frac{M_w}{W} - \frac{N_w}{b \cdot h}$$

$$\sigma_t = \frac{Q \cdot (\bar{y} - a/4)}{b \cdot h^2 / 6} - \frac{Q \cdot \sqrt{2} / 2}{b \cdot h}$$



$$\text{essendo} \quad : h = a / \sqrt{2}$$

$$1.2 \cdot f_{ctd} = \frac{12 Q}{b \cdot a} \cdot \left(\frac{\bar{y}}{a} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) = \frac{12 V}{b \cdot d^*} \cdot \left(\frac{\bar{y}}{a} - \frac{1}{3} \right)$$

$$V = \frac{1.2}{12 \cdot \left[\left(\bar{y}/a \right) - 1/3 \right]} \cdot b \cdot d^* \cdot f_{ctd} = 0.25 b \cdot d \cdot f_{ctd}$$

$$V_d \leq V_{Rd1} = 0.25 \cdot b_w \cdot d \cdot f_{ctd} \cdot r \cdot (1 + 50 \rho_l) \cdot \delta$$

$$d, b_w$$

dimensioni trave

$$r = 1.6 - d > 1 \quad [d \text{ in metri}]$$

un coefficiente che tiene conto dell'effetto dell'ingranamento degli inerti, funzione del rapporto tra l'altezza utile d della trave e la dimensione dell'inerte stesso, trascurabile al crescere di d oltre 0.6 m

$$1 + 50\rho_l \leq 2$$

un coefficiente dipendente dalla percentuale geometrica di armatura in zona tesa $\rho_l = A_{sl} / (b_w \cdot d)$ per tener conto dell'effetto spinotto, che si esplica attraverso una coppia di forze trasversali all'armatura che riduce il momento M_w ;

$$\delta = 1$$

(flessione semplice)

$$\delta = 0$$

(tensoflessione)

$$\delta = 1 + \frac{M_0}{M_{Sdu}} \leq 2$$

(pressoflessione)

δ essendo un coefficiente funzione dello stato di sollecitazione normale della sezione, che assume il valore 0 in presenza di tensoflessione, 1 in presenza di flessione pura, $\delta=1+ M_0/M_{Sdu}$ nel caso di pressoflessione con M_0 il momento che determina una tensione nulla nella fibra meno compressa della sezione ed M_{Sdu} il momento che sollecita la sezione in cui si effettua la verifica a taglio .

Il momento M_0 può essere espresso in funzione del raggio di nocciolo r_n :

$$M_0 = N \cdot r_n$$

L'EC2 fornisce per V_{Rd1} una espressione poco diversa:

$$V_{Rd1} = \left[\tau_{Rd} \cdot r \cdot (1.2 + 40 \rho_l) + 0.15 \sigma_N \right] \cdot b_w \cdot d$$

Valori di $\tau_{Rd} = 0.25 * f_{ctk} / \gamma$ ed f_{ctk}

CLASSE	C20/25	C25/30	C30/35	C35/40	C40/45	C45/50	C50/55
f_{ck}	200	250	300	350	400	450	500
f_{ctk}	15	18	20	22	25	27	29
τ_{Rd}	2.6	3.0	3.4	3.7	4.1	4.4	4.8

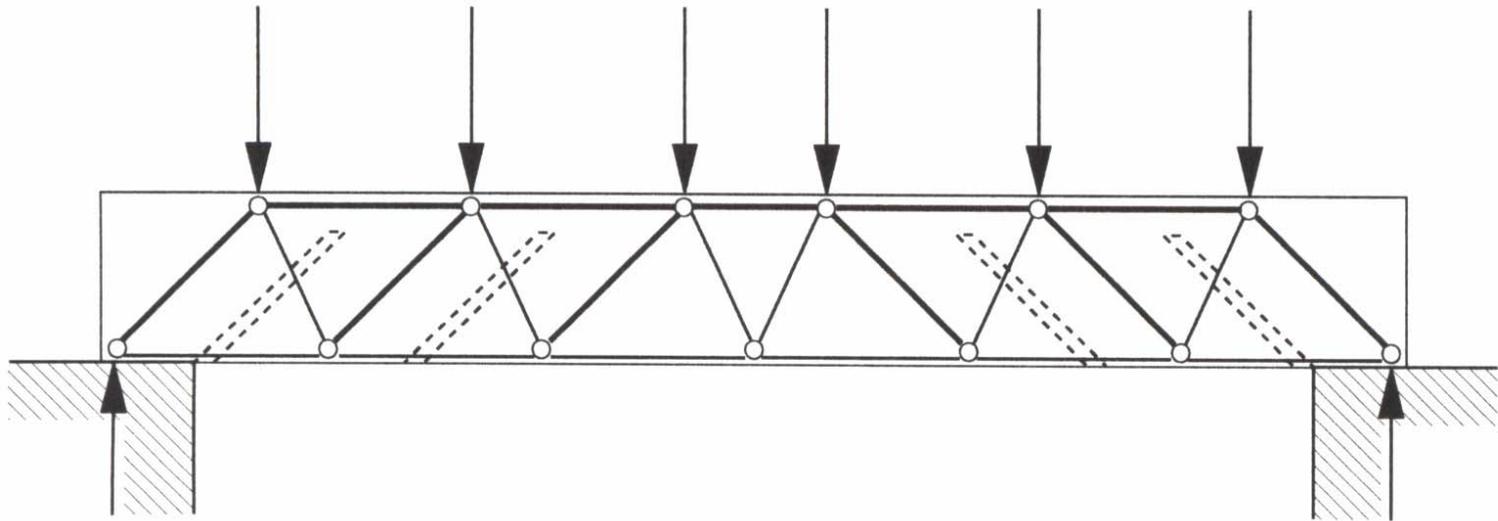
In sintesi, nelle precedenti relazioni:

- $(1+50 \rho_1)$ rappresenta l'effetto spinotto
- $r = (1.6-d)$ rappresenta l'eff. ingranamento
- δ = effetto dello sforzo assiale

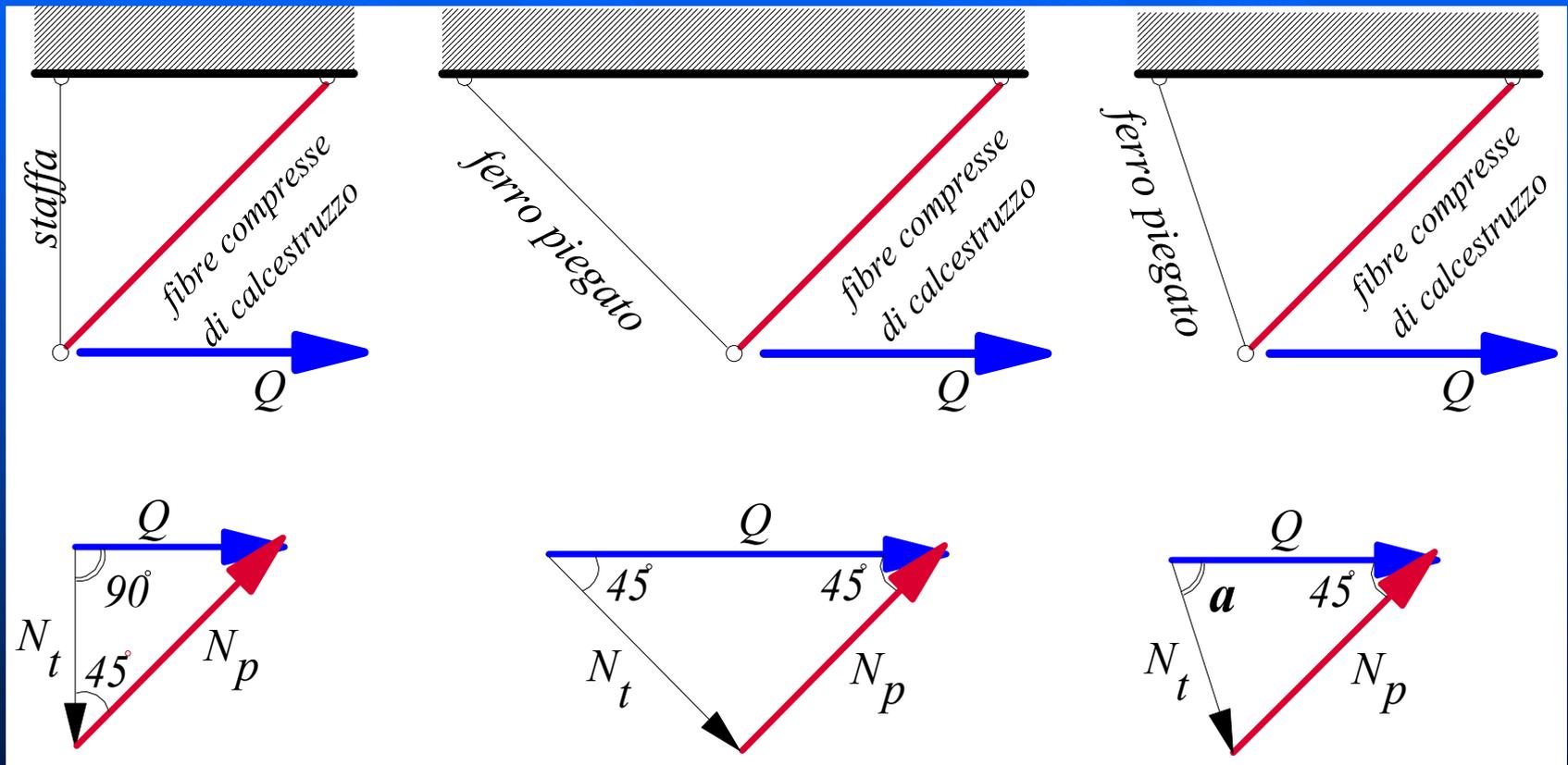
La trave con armatura trasversale

- Nella trave con armatura trasversale il fondamentale meccanismo resistente successivamente alla formazione delle fessure inclinate è quello della struttura reticolare di Ritter-Morsch in cui oltre ai correnti l'uno teso e l'altro compresso, si distinguono i montanti inclinati compressi, disposti secondo le isostatiche di compressione e determinati da due fessure successive nonché le diagonali tese realizzate dalle armature a taglio disposte secondo inclinazioni variabili in genere tra 45° e 90° .

Meccanismo di Ritter-Mörsh



$$Q = \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{d^*} = \frac{\Delta M}{d^*} = \frac{V_u \cdot d^*}{d^*} = V_u$$



Sforzo nel puntone (N_p) e nel tirante (N_t)

$$N_p \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_t \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_p \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_t \cdot \cos \alpha = V_u$$

$$N_p = \frac{V_u \cdot \sin \alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)} = \frac{\sqrt{2} \cdot V_u}{1 + \cot g \alpha}$$

$$N_t = \frac{V_u}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

TAGLIO

Il valore limite dello sforzo tagliante secondo il D.M. '96 (V_{Rd2})

$$N_p = \frac{\sqrt{2} \cdot V_u}{1 + \cot g \alpha} = \frac{0.9 \cdot d}{\sqrt{2}} \cdot b_w \cdot f_{cd}$$

$$V_u = \frac{0.9 \cdot d}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot b_w \cdot f_{cd} \cdot (1 + \cot \alpha) = 0.45 \cdot d \cdot b_w \cdot f_{cd} \cdot (1 + \cot \alpha)$$

$$V_{Rd2} = 0.30 \cdot b_w \cdot d \cdot f_{cd} \cdot (1 + \cot g \alpha)$$

Il valore limite dello sforzo tagliante secondo l'EC2 (V_{Rd2})

$$V_{Rd2} = 0.50 \cdot v \cdot b_w \cdot 0.9 \cdot d \cdot f_{cd} \cdot (1 + \cot g \alpha)$$

$$V_{Rd2} = 0.30 \cdot b_w \cdot d \cdot f_{cd} \cdot (1 + \cot g \alpha)$$

$$v = 0.7 - f_{ck}/200 \quad \text{con } f_{ck} \text{ in N/mm}^2$$

$$k = 0.50 \cdot 0.9 \cdot (0.7 - 0.83 \cdot 25/200) = 0.268$$

Secondo
D.M. 96

Verifica della sezione

a) $V_d \leq V_{Rd1}$ (non necessaria l'armatura)

b) $V_{Rd1} < V_d \leq V_{Rd2}$ (progettare l'armatura)

c) $V_d > V_{Rd2}$ (sezione non idonea)

CALCOLO ELASTICO ALLE TENSIONI AMMISSIBILI

$$\tau \leq \left[\tau_{co} = 4 + \frac{R_{ck} - 150}{75} \right]; \text{ non necessarial'arm.}$$

$$\tau_{co} \leq \tau \leq \left[\tau_{cl} = 14 + \frac{R_{ck} - 150}{35} \right]; \text{ calcoloarm.}$$

$$\tau_{cl} \leq \tau; \text{ sezione non idonea}$$

Progetto Armatura a taglio (D.M. '96)

$$V_{Sdu} \leq V_{Rd3} = V_{sd} + V_{cd}$$

$$N_t = \frac{V_u}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

$$A_{fs} \cdot f_{sd} \cdot \frac{0.9d}{s} = \frac{V_{sd}}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

$$V_{sd} = A_{fs} \cdot f_{sd} \cdot \frac{0.9d}{s} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$V_{cd} = 0.6 f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \cdot \delta$$

$$A_{fs} = \frac{(V_d - V_{cd}) \cdot s}{0.9 d \cdot f_{yd} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

$$s = \frac{A_{fs} \cdot f_{yd} \cdot 0.9d \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)}{(V_d - V_{cd})}$$

Progetto Armatura a taglio

(EC2)

$$N_t = \frac{V_u}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

$$A_{fs} \cdot f_{sd} \cdot \frac{0.9d}{s} = \frac{V_{sd}}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

$$V_{sd} = A_{fs} \cdot f_{sd} \cdot \frac{0.9d}{s} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$V_{cd} = V_{Rd1} = [0.25 \cdot f_{ctd} \cdot k \cdot (1 + 50\rho_l) + 0.15\sigma_N] \cdot b_w \cdot d$$

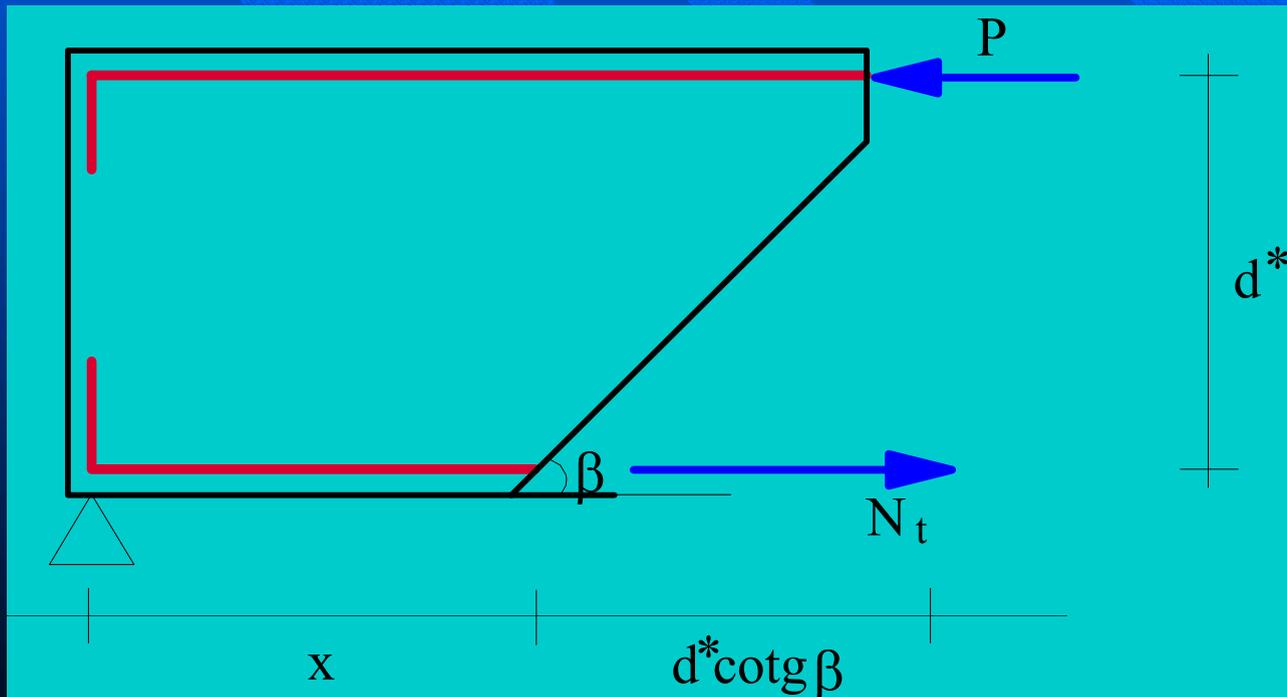
$$A_{fs} = \frac{(V_d - V_{cd}) \cdot s}{0.9d \cdot f_{td} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

$$s = \frac{A_{fs} \cdot f_{yd} \cdot 0.9d \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)}{(V_d - V_{cd})}$$

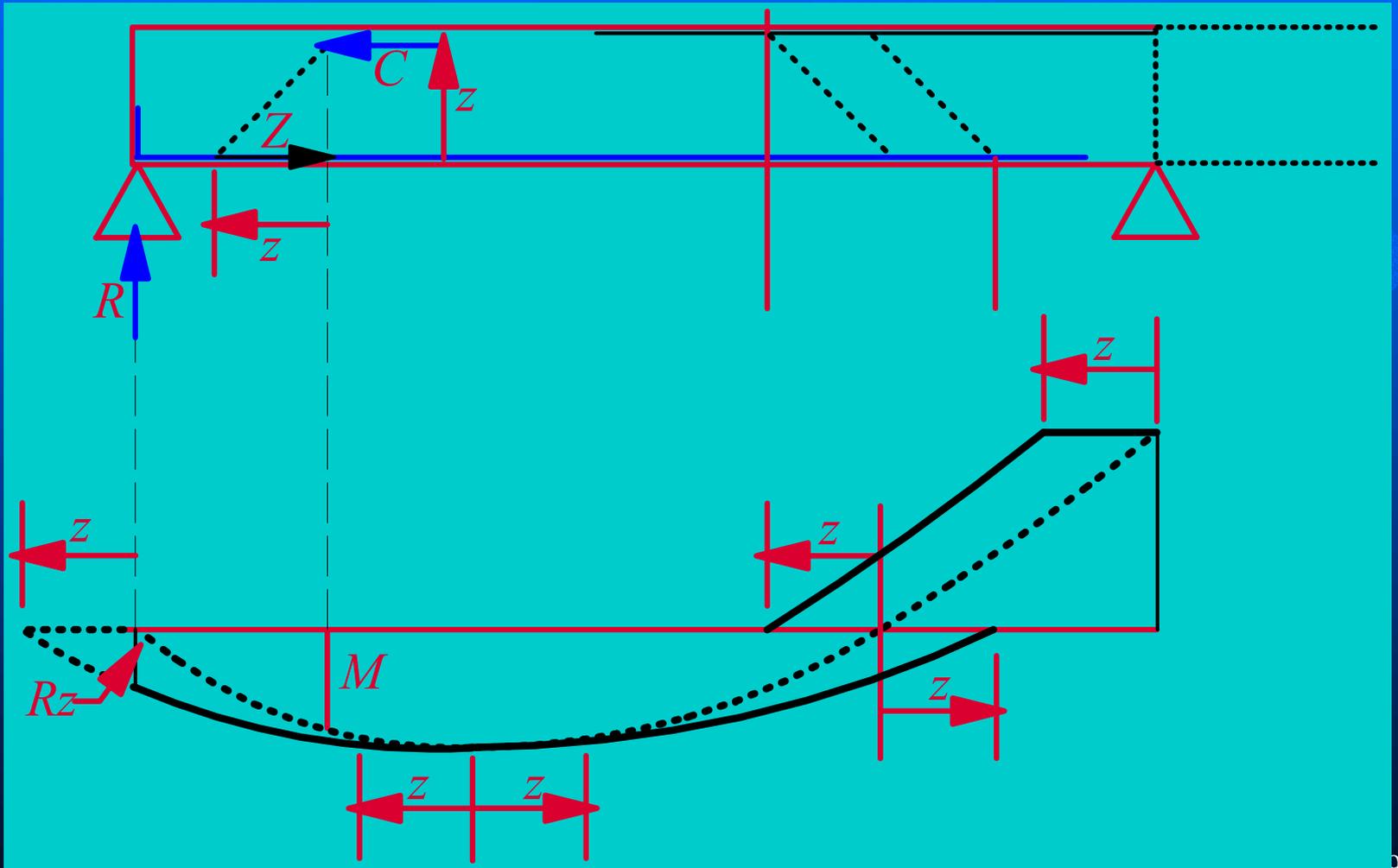
EFFETTO DELLA FESSURAZIONE A TAGLIO SULLA ARMATURA A FLESSIONE (travi senza armatura a taglio)

$$N_t \cdot d^* = M_{Sdu}(x) + V_{Sdu} \cdot d^* \cot \beta$$

$$M'(x) = M_{Sdu}(x) + V_{Sdu} \cdot d^* \quad (\beta = 45^\circ)$$



Ampliamento del diagramma del momento



Le prescrizioni regolamentari

- D.M.'96 ed EC2 in assenza di armatura

$$M'(x) = M_{Sdu}(x) + V_{Sdu} \cdot d^*$$

Le prescrizioni regolamentari

- D.M.'96 ed EC2 in presenza di armatura

$$M'_{Sdu}(x) = M_{Sdu}(x) + V_{Sdu} \cdot d^* \cdot (\cotg \beta - \cotg \alpha)$$

$$M'_{Sdu}(x) \geq M_{Sdu}(x) + 0.2 \cdot d^*$$

Il metodo dell'inclinazione variabile delle bielle (1)

- Oltre al metodo in precedenza esposto che si definisce metodo standard, l'armatura a taglio agli stati limite, si può determinare con un metodo alternativo, che si basa su considerazioni sia sperimentali sia teoriche legate alla analisi limite.
- Infatti si osserva che le fessure a taglio si formano con inclinazione prossima a 45° , ma, al crescere del taglio, l'inclinazione delle fessure che progressivamente si estendono, evolve incurvandosi sull'orizzontale ed inoltre le isostatiche di compressione attraversano le fessure iniziali determinando bielle compresse con una inclinazione media minore dei 45° iniziali.

Il metodo dell'inclinazione variabile delle bielle (2)

- Tale comportamento concorda con il teorema statico dell'analisi limite che in presenza di una molteplicità di campi di sollecitazione staticamente ammissibili (ovvero i possibili sistemi reticolari di Morsch con differenti inclinazioni del puntone compresso) individua il moltiplicatore di collasso a taglio nel massimo tra i moltiplicatori associati, che generalmente non coincide con il moltiplicatore relativo alle bielle a 45° .

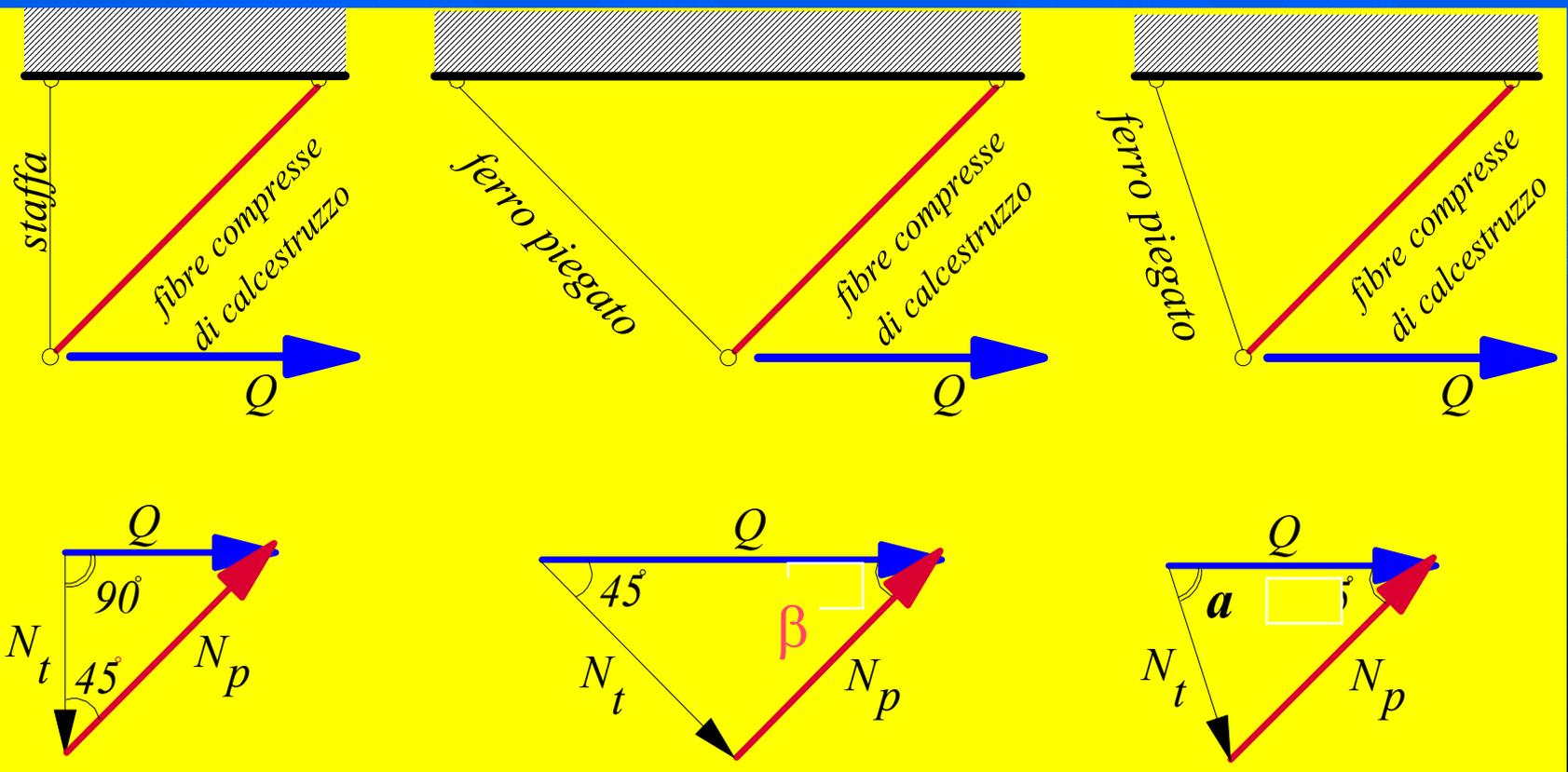
Il metodo dell'inclinazione variabile delle bielle (2)

- Tale comportamento concorda con il teorema statico dell'analisi limite che in presenza di una molteplicità di campi di sollecitazione staticamente ammissibili (ovvero i possibili sistemi reticolari di Morsch con differenti inclinazioni del puntone compresso) individua il moltiplicatore di collasso a taglio nel massimo tra i moltiplicatori associati, che generalmente non coincide con il moltiplicatore relativo alle bielle a 45° .

Il metodo dell'inclinazione variabile delle bielle (3)

- In effetti tale considerazione richiederebbe la determinazione dei moltiplicatori di collasso per più sistemi reticolari caratterizzati da diverse inclinazioni del puntone compresso, al fine di determinarne il massimo.
- Per le pratiche finalità è sufficiente fissare un angolo β minore di 45° e valutare la capacità portante massima legata alla resistenza del puntone compresso e del tirante.

$$Q = \frac{\Delta M}{d^*} = \frac{V_u \cdot d^*}{d^*} = V_u$$



Sforzo nel puntone (N_p) e nel tirante (N_t)

$$N_p \cdot \sin \beta - N_t \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_p \cdot \cos \beta + N_t \cdot \cos \alpha = V_u$$

$$N_p = \frac{V_u \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{V_u}{\cos \beta + \sin \beta \cdot \cot \alpha}$$

$$N_t = \frac{V_u}{\sin \alpha \cdot \cot \beta + \cos \alpha}$$

Il valore limite dello sforzo tagliante secondo il D.M. '96 (V_{Rd2})

Uguagliando N_p allo sforzo di compressione massimo sostenibile ($v \cdot b_w \cdot d^* \cdot \sin \beta \cdot f_{cd}$), ed N_t allo sforzo di trazione massimo ($A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot d^* / s$), si ottiene:

$$V_{uc} = v \cdot b_w \cdot d^* \cdot f_{cd} \cdot \frac{\cot \beta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \beta}$$

$$V_{us} = A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot d^* / s \cdot \sin \alpha \cdot (\cot \alpha + \cot \beta)$$

Il taglio massimo attribuibile è allora espresso nel modo seguente:

$$V_{Rd2} = \min (V_{uc}, V_{us})$$

Occorre poi imporre che la rottura del tirante preceda quella del puntone per avere una rottura duttile. Tale condizione si pone alla prima fessurazione ($\beta=45^\circ$) imponendo $V_{us} \leq V_{uc}$. Si ottiene allora una condizione sull'armatura per la quale la fessurazione interviene prima o contemporaneamente alla rottura del puntone:

$$\left[\omega_{w, \lim} = \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{b_w \cdot s \cdot f_{cd}} \right] \leq \frac{0.5 \cdot v}{\sin \alpha}$$

In presenza di staffe ($\alpha=90^\circ$) le relazioni precedenti si semplificano

$$V_{uc} = v \cdot b_w \cdot d^* f_{cd} \cdot \frac{1}{\tan \beta + \cot \beta}$$

$$V_{us} = A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot d^* / s \cdot \cot \beta$$

$$\frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{b_w \cdot s \cdot f_{cd}} \leq 0.5 v$$

LIMITAZIONI NORMATIVE

$0.5 < \cot g \beta < 2$ con arm. long. interrotte

$0.4 < \cot g \beta < 2.5$ con arm. long. non interrotte

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s \cdot b_w \cdot \text{sen } \alpha}$$

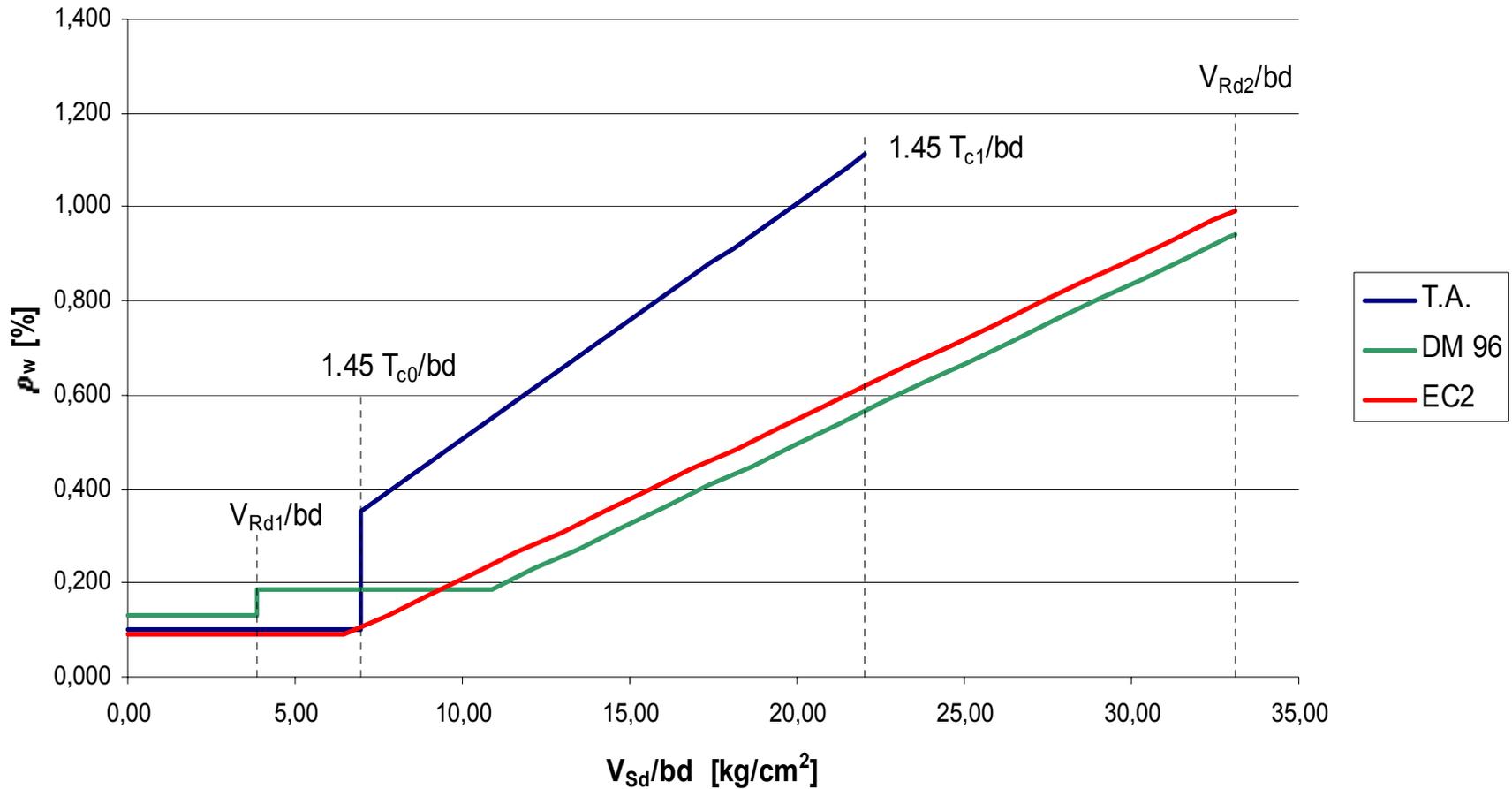
$$150 \leq R_{ck} \leq 250; \quad \rho_w = 0.09\%$$

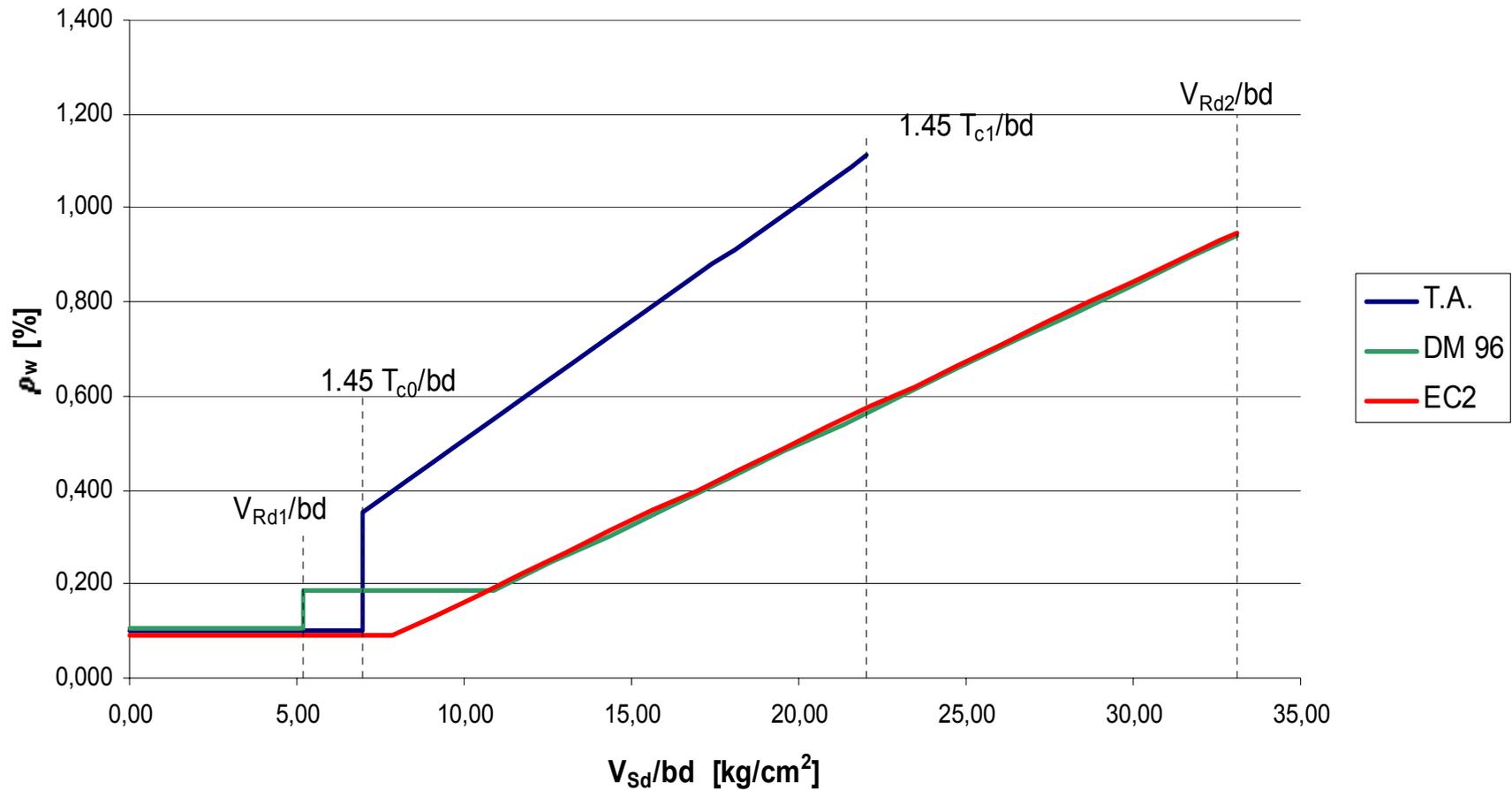
$$250 < R_{ck} \leq 450; \quad \rho_w = 0.13\%$$

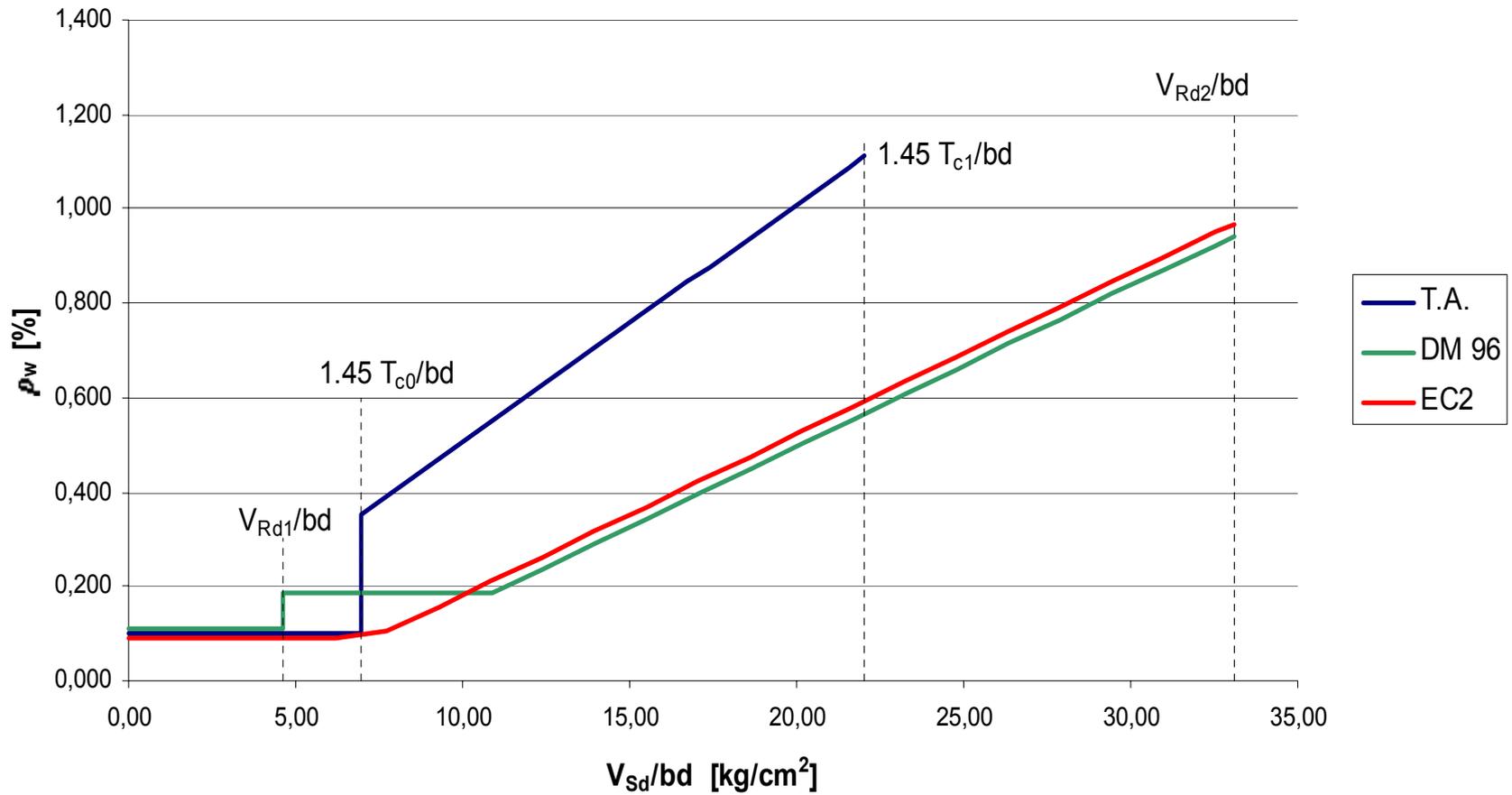
$$450 < R_{ck} \leq 600; \quad \rho_w = 0.16\%$$

TAGLIO

b= 30 h= 60



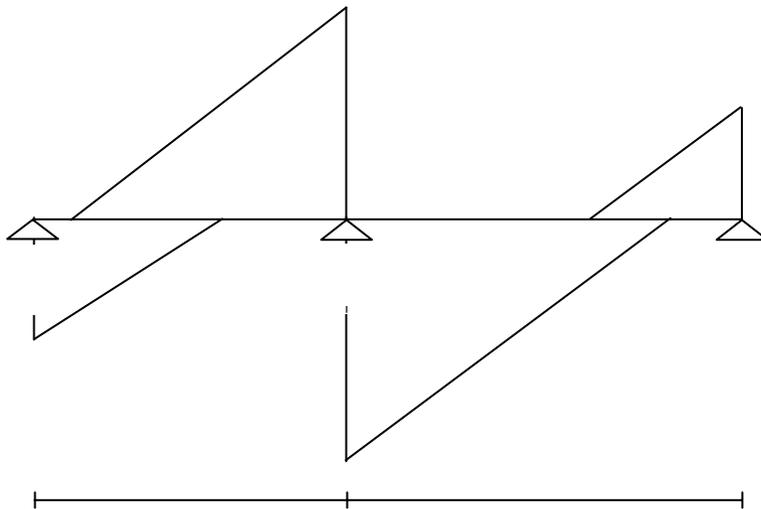
b= 100 h= 25

$b = 60$ $h = 40$ 

ESEMPIO n.1

Per la trave continua di sezione rettangolare $b = 40 \text{ cm}$, $h = 70 \text{ cm}$, di cui all'esercizio 9.5, si ipotizzi un diagramma del taglio come in figura, involuppo delle sollecitazioni dovute ai carichi verticali ed alle azioni orizzontali in cui i tagli di progetto risultano essere

Si effettui la verifica a taglio allo stato limite ultimo per la campata BC supponendo che in tale tratto siano presenti ferri sagomati a 45° con passo $p = 35 \text{ cm}$ e diametro $\phi 16$.



- $V_{dA} = 15575 \text{ kg}$

- $V_{dB} = 26750 \text{ kg}$

- $V_{dB} = 30918 \text{ kg}$

- $V_{dC} = 14140 \text{ kg}$

La sezione in esame è rettangolare con $b = 40 \text{ cm}$, $h = 70 \text{ cm}$,
 $d = 3.5 \text{ cm}$, $A_s = 8 \phi 16 = 16.08 \text{ cm}^2$.

Inoltre per la campata in esame risulta che il taglio di progetto
è $V_d = 30918 \text{ kg}$

■ Essendo:

■ $b_w = 40 \text{ cm}$

■ $d = h - d' = 70 - 3.5 = 66.5$

■ $f_{ctd} = 0.70 * 0.58 * R_{ck}^{2/3} / 1.6 = 10.07 \text{ kg/cm}^2$

■ $r = 1.6 - d = 1.6 - 0.665 = (>=1) = 1$

■ $\rho = A_s / (b_w * d) = 16.08 / (40 * 66.5) = 0.605\%$

■ $\delta = 1$

Calcolo di V_{Rd1} e V_{Rd2}

- Ed ancora:
- $f_{cd} = 0.83 * R_{ck} / 1.6 = 129.69 \text{ kg/cm}^2$
- $1 + \cotg(\alpha) = 1$ ($\alpha = 90^\circ$ trattandosi di staffe)
- Risulta:
- $V_{Rd1} = 0.25 * 40 * 66.5 * 10.07 * 1 * (1 + 50 * 0.605 \%) * 1 = 8722 \text{ kg}$
- $V_{Rd2} = 0.30 * 40 * 66.5 * 129.69 * 1 = 103493 \text{ kg}$

Essendo $V_{Rd1} < V_d < V_{Rd2}$ occorre
progettare idonea armatura

In assenza di ferri piegati:

- Deve risultare: $V_d \leq V_{cd} + V_{sd}$
- essendo: V_{cd} contributo effetti collaterali (spinotto, ingranamento, etc)
 V_{sd} il contributo delle staffe

Inoltre deve risultare:

- $V_{sd} = \max [0.5 V_d ; (V_d - V_{cd})] = \max [15459 , (30918 - 16072)] = 15459 \text{ kg}$
- $n_{st} = V_{sd} / (n_b * \omega_{st} * f_{ysd}) * 100 / (0.9 * d) =$
 $= 15459 / (2 * 0.5 * 3304) * 100 / (0.9 * 66.5) = \mathbf{7.81 \text{ staffe } \phi 8 / m}$
- L'armatura corrispondente può essere costituita da staffe $\phi 8 / 12.5 \text{ cm}$ a 2 bracci.

In presenza di ferri piegati

- Deve risultare: $V_d \leq V_{cd} + V_{sd} + V'_{sd}$
- Essendo: V_{cd} contributo effetti collaterali (spinotto, ingranamento, etc)
- V_{sd} il contributo delle staffe
- V'_{sd} il contributo dei sagomati
- E inoltre deve risultare: $V_{sd} + V'_{sd} \geq 0.5 V_d$

Risulta:

- $V_{cd} = 0.60 * f_{ctd} * b_w * d * \delta = 0.6 * 10.07 * 40 * 66.5 = 16072 \text{ kg}$ (l'EC2 pone $V_{cd} = V_{Rd1}$)
- $V_{sd} + V'_{sd} \geq [V_d - V_{cd} = 30918 - 16072 = 14846 \text{ kg}]$
- $V_{sd} + V'_{sd} \geq 0.5 * V_d = 0.5 * 30918 = 15459 \text{ kg}$
- $(V_{sd} + V'_{sd}) = \max (14846, 15459) = 15459 \text{ kg}$

Calcolo staffe

- Tratto da armare ($V_d > V_{Rd1}$)
- $\Delta z = l_z * (V_d - V_{Rd1}) / V_d = 231 \text{ cm}$
- Armatura di staffe:
- Deve risultare $V_{sd} = \max [V_d - V_{cd} - V'_{sd}, 0.5 * (V_d - V_{cd})] = (-614, 7730) = 7730 \text{ kg}$
- Per un tratto pari ad 1 m si ottiene ($n_{st} = n.$ staffe per metro)
- $n_{st} = V_{sd} / (n_b * \omega_{st} * f_{sd}) * 100 / (0.9 * d) = 7730 / (2 * 0.5 * 3304) * 100 / (0.9 * 66.5) = \mathbf{3.9 \text{ staffe } \varnothing 8 / m}$
- Minimo di armatura (D.M.)
- $n_{st} = 0.1 * b * (1 + 0.15d/b) / (n_b * \omega_{st}) = \mathbf{5 \text{ staffe } \varnothing 8 / m}$

Metodo dell'inclinazione variabile del puntone compresso.

Si assume $\beta=27^\circ$ e staffe ($\alpha=90^\circ$)

$$V_{uc} = v \cdot b_w \cdot d^* f_{cd} \cdot \frac{1}{\tan \beta + \cot \beta} = 0.6 \cdot 40 \cdot 0.9 \cdot 66.5 \cdot 129 \frac{1}{2.47} = 75018 \text{ kg}$$

$$V_{us} = A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot d^* / s \cdot \cot \beta = 1.3304 \cdot \frac{0.9 \cdot 66.5}{12.5} \cdot 1.96 = 31006 \text{ kg}$$

$$V_u = \min(75018, 31006) = 31006 \text{ kg} \quad (\text{poco maggiore di } [V_d = 30918 \text{ kg}])$$

$$\left[\frac{A_{sw} \cdot f_{ywd}}{b_w \cdot s \cdot f_{cd}} = \frac{1.3304}{40 \cdot 12.5 \cdot 129} = 0.051 \right] \leq [0.5 v = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3]$$

ORDINE DEGLI INGEGNERI

Corso di aggiornamento sulla normativa sismica
gen. 2007 – mar. 2007

La verifica a taglio delle travi in c.a. allo Stato Limite Ultimo (S.L.U.)

FINE PRESENTAZIONE

Prof. Ciro FAELLA

Dipartimento di Ingegneria Civile

Università di Salerno

